

**В. И. ЛАВРИК, В. Н. САВЕНКОВ**

**СПРАВОЧНИК  
по  
КОНФОРМНЫМ  
ОТОБРАЖЕНИЯМ**

В справочнике излагаются способы построения аналитических функций, конформно отображающих одну заданную область на другую. Основное внимание уделено практическим приемам нахождения отображающих функций главным образом при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца.

Приводится справочный материал по теории функций комплексного переменного, необходимый при первом ознакомлении с методами конформных отображений.

В конце помещен каталог конформных отображений, наиболее часто встречающихся в современной литературе и весьма полезных для различных приложений (гидромеханика, аэромеханика, теория упругости, теория фильтрации, теплотехника, гидротехника, электротехника, радиотехника, теория электростатических и магнитных полей, электронная оптика и др.).

Рассчитан на студентов, инженеров, научных работников, а также на всех тех, кто имеет дело с применением конформных отображений к различным техническим задачам.

Р е ц е н з е н т  
академик АН УССР  
Г. Н. САВИН

# Предисловие

Предлагаемый вниманию справочник рассчитан на самый широкий круг читателей. Он будет полезен студентам, изучающим теорию функций комплексного переменного, инженерам и научным работникам, ведущим свои исследования в тех областях приложения математики, в которых используется аппарат теории функций комплексного переменного, в частности метод конформных отображений, наконец всем тем, кто хотя бы в какой-то мере соприкасается с такими областями, как гидромеханика, теория фильтрации, теория упругости, теплотехника, гидротехника, электротехника, радиотехника, электронная оптика и многими другими. Справочником может воспользоваться и тот читатель, который встречается с предметом впервые.

В главе 1 даны основные понятия, на которых строится вся теория функций комплексного переменного. Здесь также приводятся некоторые сведения из теории функций комплексного переменного, необходимые для понимания последующих разделов справочника.

Глава 2 посвящена изучению элементарных функций комплексного переменного с геометрической точки зрения, т. е. в этой главе устанавливаются основные геометрические свойства элементарных функций, знание которых необходимо при отыскании областей, конформно отображающихся при помощи этих функций и их комбинаций.

В главе 3 решается основная и наиболее трудная задача теории конформных отображений — отыскание аналитической функции, конформно отображающей одну наперед заданную область на другую заданную область. Такая задача имеет большое практическое значение, однако достаточно эффективных методов ее решения в общем случае не существует и до настоящего времени. Мы приводим классическое решение этой задачи при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца, который в ряде частных случаев позволяет найти искомую отображающую функцию в замкнутом виде, т. е. в виде некоторого явного конечного выражения. В этой главе приведен полный вывод формулы Кристоффеля — Шварца и рассмотрен ряд примеров конформного отображения верхней полуплоскости на наперед заданные многоугольники (дву-, тре-, четырех-, пяти- и шестиугольники).

В конце справочника помещен каталог конформных отображений наиболее часто встречающихся областей, а также список литературы, рекомендуемой для дальнейшего изучения предмета.

Таким образом, настоящий справочник имеет двоякое назначение: во-первых, он дает фактическую справку о способах отыскания отображающих функций; во-вторых, в нем рассмотрены и собраны многочисленные примеры различных областей и функций, точно реализующих конформное отображение этих областей на некоторую каноническую (простейшую) область, что делает удобным использование конформных отображений при решении различных задач.

Выражаем самую глубокую признательность нашему учителю члену-корреспонденту АН УССР П. Ф. Фильчакову за ценные советы.

Приносим также искреннюю благодарность А. Я. Бурыкину, который оказал большую техническую помощь при подготовке рукописи.

Мы будем благодарны всем, кто пожелает дать свои критические замечания и советы по улучшению содержания книги и просим присыпать их по адресу: Киев, ул. Репина, 3, издательство «Наукова думка».

Авторы

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Приведенные в этой главе сведения, связанные с понятием комплексного числа и функции комплексного переменного, необходимы при изложении последующего материала. Предполагая, что читатель уже знаком с основами математического анализа в объеме технических вузов, мы уделяем главное внимание геометрической стороне рассматриваемых вопросов, что оправдывается основным содержанием справочника.

### § 1. Комплексные числа

**1. Понятие комплексного числа и его геометрическая интерпретация.** Понятие числа является основным понятием математики. Оно возникло непосредственно из человеческой практики. Сначала, в процессе счета предметов, сложилось понятие *целого положительного (натурального) числа*. В дальнейшем потребность в различных измерениях привела к расширению понятия числа. Именно, в результате практики измерений возникло понятие *дробного и иррационального числа*.

Понятие *отрицательного числа* появилось под влиянием внутренних потребностей самой математики, например в связи с необходимостью сделать разрешимым уравнение вида  $x + b = a$  даже тогда, когда  $b > a$ .

*Положительные и отрицательные, рациональные и иррациональные числа называются действительными или вещественными числами.* Геометрически действительные числа изображаются точками прямой (числовой оси), на которой указано положительное направление, начало отсчета (нуль) и масштаб (единица).

Дальнейшее расширение понятия числа, связанное с появлением *комплексных (мнимых)* чисел, было обусловлено, как и в случае отрицательных чисел, внутренней логикой развития самой математики.

В частности, решение квадратных и кубических уравнений уже на ранней ступени развития алгебры привело к невозможной в области действительных чисел операции извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Так появились числа вида  $a \pm \sqrt{-b}$  ( $b > 0$ ), на которые индуктивно начали распространять все правила действий с вещественными числами.

Несмотря на то что природа мнимых чисел вида  $a \pm \sqrt{-b}$  ( $b > 0$ ) долго оставалась не раскрытой, смелое их применение в промежуточных выкладках оправдывалось вполне вещественным, реальным и правильным окончательным результатом.

В настоящее время комплексные числа не менее важны, чем вещественные, и в чисто математических исследованиях, и для всевозможных приложений как в физике, так и в технике.

Перейдем к определению комплексного числа, а затем введем и изучим комплексные числа, рассматривая их как арифметические эквиваленты некоторых геометрических объектов (каждая арифметическая операция над комплексными числами будет отражать определенную геометрическую операцию над объектами).

**Определение.** Комплексным числом  $z$  назовем пару вещественных чисел  $(x, y)$ , для которых определены действия сложения и умножения по следующим правилам:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \quad (1.1)$$

$$(x_1, y_1) (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.2)$$

Пользуясь определением, нетрудно проверить, что действия над комплексными числами обладают *ассоциативным, коммутативным и дистрибутивным* свойствами, т. е. подчиняются известным законам арифметики, а именно:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3); \quad (1.3)$$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1; \quad (1.4)$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3. \quad (1.5)$$

Первое число пары будем называть *вещественной частью* комплексного числа и обозначать следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z^* \quad (1.6)$$

а второе число пары будем называть *мнимой частью* комплексного числа и обозначать через

$$y = \operatorname{Im} z^*. \quad (1.7)$$

Приведенная запись комплексного числа в виде  $z = (x, y)$  не совсем привычна и удобна при выполнении различных арифметических операций над комплексными числами. Поэтому перейдем к так называемой *алгебраической форме* комплексного числа.

Для этого определим операцию умножения комплексного числа  $z = (x, y)$  на действительное число  $k$  равенством

$$k(x, y) = (kx, ky), \quad (1.8)$$

т. е. обычным умножением действительной и мнимой частей комплексного числа на действительное число  $k$ .

Тогда

$$(x, y) = (x + 0, 0 + y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1). \quad (1.9)$$

Число  $(1, 0)$  ведет себя при умножении, как единица, ибо  $z(1, 0) = (x, y)(1, 0) = (x, y) = z$ . Поэтому разумно положить  $(1, 0) = 1$ . Число  $(0, 1)$  будем называть *мнимой единицей* и обозначать  $(0, 1) = i$ . Нетрудно проверить, что

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1(1, 0) = -1. \quad (1.10)$$

Отсюда берет свое начало обозначение  $i = \sqrt{-1}$ .

Теперь равенство (1.9) можно переписать в практически удобной форме, называемой *алгебраической формой* комплексного числа

$$z = (x, y) = x + iy, \quad (1.11)$$

---

\* Обозначения  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$  появились как сокращения латинских слов *realis* (действительный) и *imaginarius* (мнимый).

Комплексное число  $(x, 0)$  отождествляется с *действительным* числом, т. е.  $x = (x, 0) = x + i0$ , а комплексное число  $(0, y) = 0 + iy = iy$  будем называть *чисто мнимым*. Следовательно, совокупность всех действительных чисел можно рассматривать как часть совокупности всех комплексных чисел.

*Два комплексных числа  $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$  считаются равными, если равны соответственно их действительные и мнимые части, т. е. равенство*

$$z_1 = z_2 \quad (1.12)$$

равносильно двум равенствам

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2. \quad (1.13)$$

Комплексные числа  $z = x + iy$  взаимно однозначно сопоставляются с парами действительных чисел  $(x, y)$ , последние же, как известно из

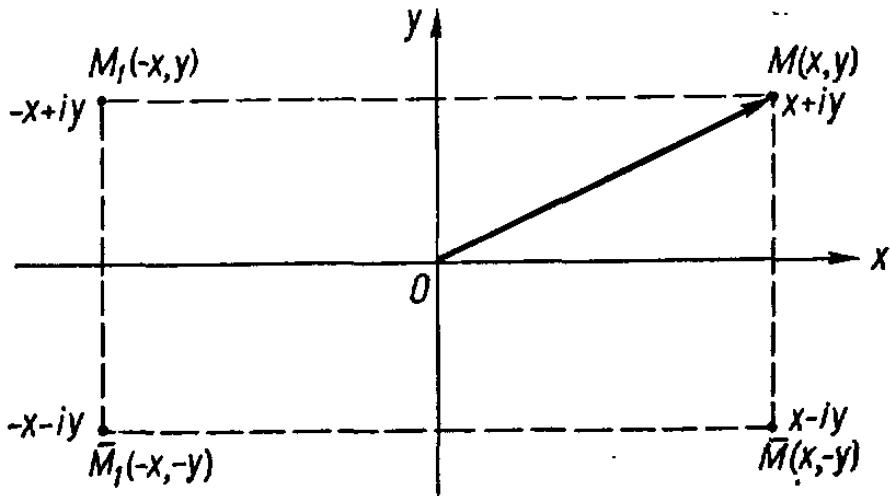


Рис. 1.

аналитической геометрии, взаимно однозначно сопоставляются с точками плоскости  $xOy$  декартовой прямоугольной системы координат. Таким образом, комплексное число  $x + iy$  будем изображать на плоскости точкой  $M$  с абсциссой  $x$  и ординатой  $y$  (рис. 1).

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Будем обозначать ее той же буквой  $z$ , что и комплексные числа, изображаемые на ней.

Число  $x + iy$  иногда называют *аффиксом точки*  $(x, y)$ . Ось абсцисс в комплексной плоскости называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой*.

Число  $x - iy$  называется *комплексно сопряженным* числу  $x + iy$ . Эти числа изображаются точками, симметричными относительно оси  $x$ -ов. Числа  $x + iy$  и  $-x - iy$  изображаются точками, симметричными относительно начала координат (см. рис. 1).

Комплексные числа можно изображать также *вектором*, тем более, что они складываются и вычтываются по правилу сложения и вычитания векторов, о чем будет сказано позже. Однако полной аналогии между комплексными числами и векторами проводить не следует, ибо ни скалярное, ни векторное произведения не имеют никакого отношения к умножению комплексных чисел.

Если комплексное число  $z = x + iy$  изобразить на плоскости при помощи радиуса-вектора  $\bar{O}z$ , начало которого совмещено с началом координат, а конец с точкой  $(x, y)$ , то его действительная часть  $x$  и мнимая часть  $y$  будут *проекциями* этого радиуса-вектора соответственно на действительную и мнимую оси.

Геометрическое изображение комплексного числа приводит к его тригонометрической форме.

Обозначим через  $r$  длину радиуса-вектора  $\overrightarrow{Oz}$ , изображающего комплексное число  $z = x + iy$ , а через  $\varphi$  — угол между положительным направлением действительной оси и радиусом-вектором  $\overrightarrow{Oz}$ . Числа  $r$  и  $\varphi$  называются соответственно *модулем* (абсолютной величиной) и *аргументом* комплексного числа  $x$  и обозначаются  $r = |z| = |x + iy|$ ,  $\varphi = \operatorname{Arg} z$ . Модуль комплексного числа определяется однозначно, а аргумент с точностью до целого слагаемого, кратного  $2\pi$ . Значения аргумента, лежащие в промежутке  $(-\pi, \pi]$ , будем называть *главным значением аргумента* и обозначать  $\arg z$ . Очевидно, справедливо равенство

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$-\pi < \arg z \leq \pi. \quad (1.14)$$

Введение аргумента и модуля вместо действительной и мнимой частей комплексного числа, очевидно, равносильно переходу от декартовой прямоугольной системы координат к полярной.

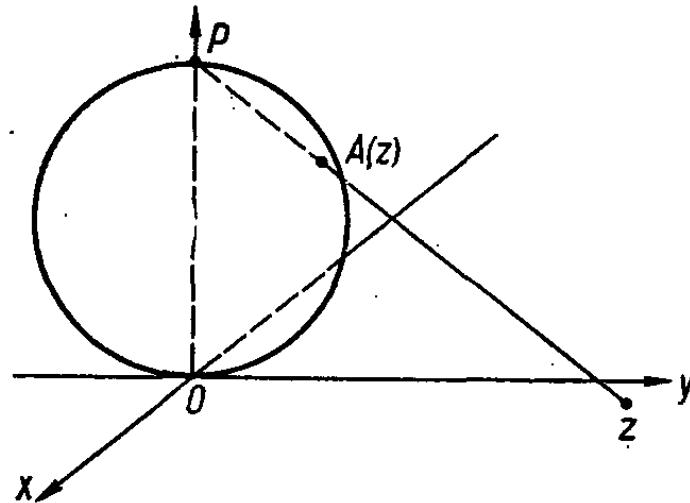


Рис. 2.

плоскости  $xOy$  и касающуюся ее в начале координат (рис. 2).

Каждой точке  $z$  плоскости  $xOy$  поставим в соответствие точку  $A(z)$ , являющуюся пересечением сферы с прямой, соединяющей точки  $P$  и  $z$ . При этом все точки сферы, кроме точки  $P$ , находятся во взаимно однозначном соответствии с точками плоскости  $xOy$ . Нетрудно заметить, что, когда  $|z| \rightarrow \infty$ , точка  $A(z)$  стремится к точке  $P$ , следовательно, точке  $P$  сферы соответствует бесконечно удаленная точка расширенной комплексной плоскости  $z$ . Расширенную комплексную плоскость иногда называют *комплексной сферой* или *сферой Римана*.

В отличие от замкнутой плоскости с исключенной точкой  $z = \infty$  называется *открытой комплексной плоскостью*.

Так как  $r$  и  $\varphi$  являются полярными координатами точки  $(x, y)$ , то имеем

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.15)$$

Учитывая (1.15), получим тригонометрическую форму комплексного числа

$$z = x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.16)$$

Из (1.15) находим

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad (1.17)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.18)$$

$$\arg z = \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}. \quad (1.19)$$

В последней формуле нельзя брать любое значение арктангенса, а только надлежащим образом подобранное, так как в левой части аргумент в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$  определяется однозначно, в правой же части арктангенс — двузначно.

Поэтому в дальнейшем будем пользоваться формулами

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{при } x > 0; \quad (1.20)$$

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{при } x < 0, y \geq 0; \quad (1.21)$$

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{при } x < 0, y < 0; \quad (1.22)$$

кроме того,

$$\begin{aligned} \arg z &= \frac{\pi}{2} && \text{при } x = 0, y > 0; \\ \arg z &= -\frac{\pi}{2} && \text{при } x = 0, y < 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Условия равенства двух комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , заданных в тригонометрической форме, примут вид

$$|z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi, \quad (1.24)$$

а условия комплексного сопряжения запишутся в виде

$$\begin{aligned} |z| &= |\bar{z}|, \quad \operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg} \bar{z} + 2k\pi; \quad \arg z \neq \pi \\ (k &= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \end{aligned} \quad (1.25)$$

В дальнейшем равенство между многозначными аргументами следует понимать в том смысле, что разность между левой и правой частями равенства есть число, кратное  $2\pi$ .

**2. Действия над комплексными числами.** Правила сложения и вычитания комплексных чисел в их первоначальной форме определяются формулой

$$(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2). \quad (1.26)$$

Используя алгебраическую форму комплексного числа (1.11), получим

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \quad (1.27)$$

Правило умножения в первоначальной форме определяется соотношением

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2). \quad (1.28)$$

Учитывая (1.11), получим

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \quad (1.29)$$

Из (1.27) и (1.29), в частности, следует, что произведение и сумма двух взаимно сопряженных комплексных чисел является действительным числом, а именно:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2; \quad (1.30)$$

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z, \quad (1.31)$$

поэтому

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}. \quad (1.32)$$

Деление определяется как действие, обратное умножению. Пользуясь свойством комплексно сопряженных чисел (1.30), действие деления можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \frac{(x_1, y_1)(x_2, -y_2)}{(x_2, y_2)(x_2, -y_2)} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2, -x_1y_2 + x_2y_1)}{(x_2^2 + y_2^2, 0)} = \left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right). \end{aligned}$$

Действительно, справедливость введенного действия деления легко проверить умножением:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) (x_2, y_2) = \\ &= \left( \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)x_2 - (x_2y_1 - x_1y_2)y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)y_2 + (x_2y_1 - x_1y_2)x_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \\ &= \left( \frac{x_1x_2^2 + x_1y_2^2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1y_2^2 + y_1x_2^2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = (x_1, y_1). \end{aligned}$$

Если перейти к алгебраической форме, то получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.33)$$

Легко видеть, что если комплексное число представить в виде  $z = x + iy$ , то действия сложения, вычитания, умножения и деления для комплексных чисел производятся по правилам сложения, вычитания, умножения и деления алгебраических многочленов с учетом равенств  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = i^2i = -i$ ,  $i^4 = i^3i = 1$  и т. д.

В связи с этим в дальнейшем основной формой записи комплексных чисел будет алгебраическая форма (1.11), т. е.

$$z = x + iy, \quad (1.34)$$

где

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Если записать два комплексных числа в тригонометрической форме, то правило умножения комплексных чисел примет очень удобную форму, а именно, если

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad (1.35)$$

то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]$$

или

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (1.36)$$

Деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, производится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (1.37)$$

Формулы (1.36) и (1.37) кратко читаются так: при умножении комплексных чисел модули их перемножаются, а аргументы складываются, при делении модули делятся, а аргументы вычитаются.

Из равенства (1.36) непосредственно следует формула возведения комплексного числа в целую степень (как положительную, так и отрицательную)

$$[r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (1.38)$$

которая при  $r = 1$  обращается в известную *формулу Муавра* \*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (1.39)$$

Чтобы получить формулу извлечения корня  $n$ -й степени из комплексного числа, заметим, что равенство

$$\sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.40)$$

равносильно следующему:

$$r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (1.41)$$

Но у равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться лишь кратным  $2\pi$ , т. е.

$$r = \rho^n, \quad \varphi + 2k\pi = n\theta,$$

откуда

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \quad (1.42)$$

Поэтому, окончательно получим

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (1.43)$$

где  $\sqrt[n]{r}$  — арифметическое значение корня, а  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  (если числу  $k$  давать другие целые положительные или отрицательные значения, то будут повторяться те значения корня, которые получаются при  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ).

Дадим теперь геометрическое истолкование введенным выше действиям сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

\* Формула Муавра позволяет наиболее просто выводить тригонометрические формулы для синусов и косинусов кратных углов. Для этого достаточно разложить левую часть равенства (1.39) по формуле бинома Ньютона, а затем приравнять действительные и мнимые части.

При сложении и вычитании комплексных чисел их действительные и мнимые части складываются или вычтываются отдельно. Если изобразить комплексное число при помощи вектора, то его действительная и мнимая части будут являться координатами соответствующего вектора. А так как при сложении и вычитании векторов их одноименные координаты складываются или вычтываются, то сложение и вычитание чисел геометрически истолковывается как сложение и вычитание векторов (по правилу параллелограмма).

Пусть даны числа  $z_1$  и  $z_2$ , которые геометрически изображаются соответственно радиусами-векторами  $z_1$  и  $z_2$ . Тогда конец радиуса-вектора

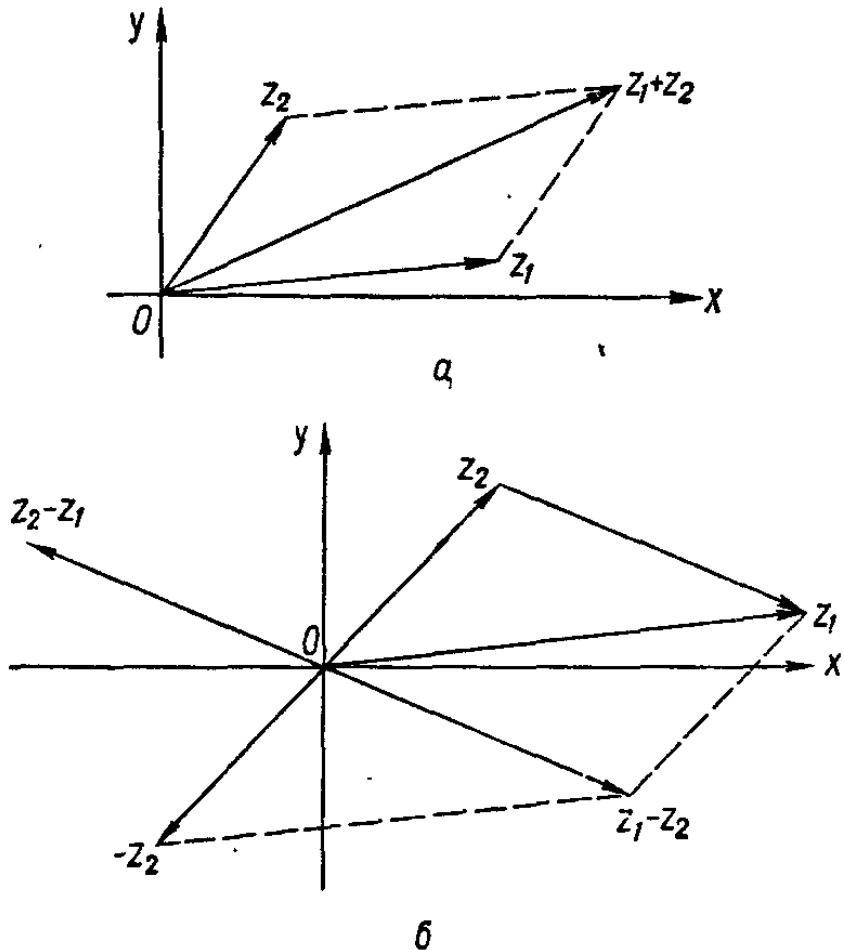


Рис. 3.

$z_1 + z_2$ , изображающего сумму данных комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , будет находиться в четвертой вершине  $z_1 + z_2$  параллелограмма с тремя данными вершинами  $O$ ,  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 3, а).

Вычитание легко сводится к сложению, если предварительно заменить  $z_2$  на противоположное по знаку число  $-z_2$  (точка  $-z_2$  получается из точки  $z_2$  посредством преобразования симметрии относительно начала  $O$ , рис. 3, б).

Следует также отметить, что радиус-вектор, соединяющий точку  $O$  с точкой  $z_1 - z_2$ , получается в результате параллельного переноса вектора, идущего из точки  $z_2$  в точку  $z_1$  (но не наоборот).

Из геометрического построения суммы двух комплексных чисел (рис. 3, а) следует, что прямая  $|z_1 + z_2|$  не может быть длиннее ломаной, состоящей из звеньев  $|z_1|$  и  $|z_2|$ . Поэтому модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.44)$$

Знак равенства в соотношении (1.44) имеет место тогда, когда векторы  $z_1$  и  $z_2$  лежат на одной прямой и направлены в одну и ту же сторону,

т. е. когда

$$\arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.45)$$

Так как каждая из сторон треугольника всегда больше разности двух других сторон, то, кроме того, можно написать

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|. \quad (1.46)$$

Знак равенства в (1.46) имеет место тогда, когда векторы лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны.

Объединив выражения (1.44) и (1.46), получим

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|. \quad (1.47)$$

Заменив в (1.47)  $z_2$  на  $-z_2$ , получим

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|. \quad (1.48)$$

Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между концами векторов, изображающих эти числа (рис. 3, б), и поэтому определяется по формуле

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1.49)$$

Геометрический смысл действий умножения и деления легче выяснить, если множители  $z_1$  и  $z_2$  представить в тригонометрической форме (1.35). Так как при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|; \quad (1.50)$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (1.51)$$

то вектор, изображающий произведение  $z_1 z_2$ , может быть получен из вектора, изображающего число  $z_1$ , поворотом его на угол  $\varphi_2$ , образуемый вектором  $z_2$  с положительным направлением действительной оси, и умножением его длины на длину вектора  $z_2$  (либо из вектора, изображающего число  $z_2$ , поворотом его на угол  $\varphi_1$ , образуемый вектором  $z_1$  с положительным направлением оси  $x$ -ов, и умножением его длины на длину вектора  $z_1$ ) (рис. 4).

Геометрически точку  $z_1 z_2$  легко построить, если учесть, что два треугольника, вершины которых соответственно расположены в точках  $O, z_1$  и  $O, z_2, z_1 z_2$ , подобны между собой (см. рис. 4).

Например, число  $i$  имеет модуль, равный единице, а аргумент, равный  $\frac{\pi}{2}$ , поэтому умножение числа  $z$  на  $i$  сводится к повороту вектора  $z$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  в положительном направлении (против часовой стрелки в выбранной нами системе координат) без изменения его длины  $|z|$ .

При геометрической интерпретации деления комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  следует пользоваться теми же рассуждениями, что и при умножении, учитывая, однако, следующее:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = |z_1| \left| \frac{1}{z_2} \right|; \quad (1.52)$$

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_1 + (-\varphi_2). \quad (1.53)$$

Поэтому вектор, изображающий частное  $\frac{z_1}{z_2}$ , может быть получен из вектора  $z_1$  поворотом его на угол  $\varphi_2$  в отрицательном направлении

и умножением его длины  $|z_1|$  на величину, обратную длине вектора  $z_2$  (рис. 5).

Геометрическое построение вектора, изображающего комплексное число  $\frac{z_1}{z_2}$ , по заданным векторам  $\overrightarrow{Oz_1}$  и  $\overrightarrow{Oz_2}$  немедленно следует, если

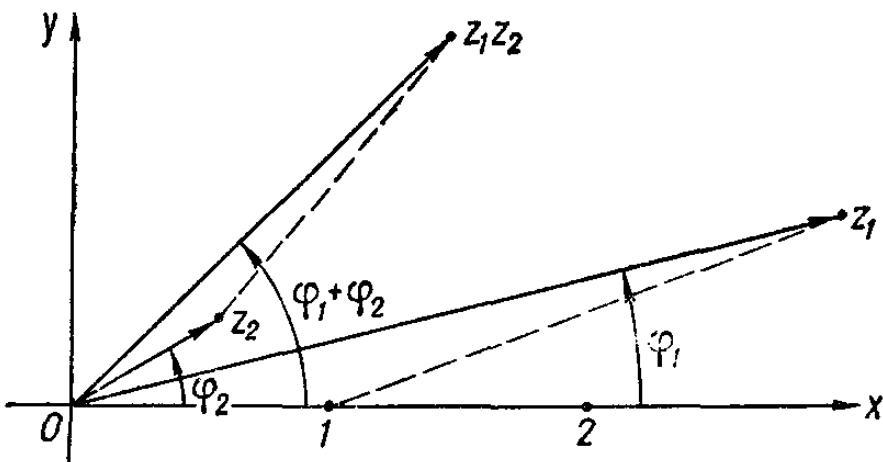


Рис. 4.

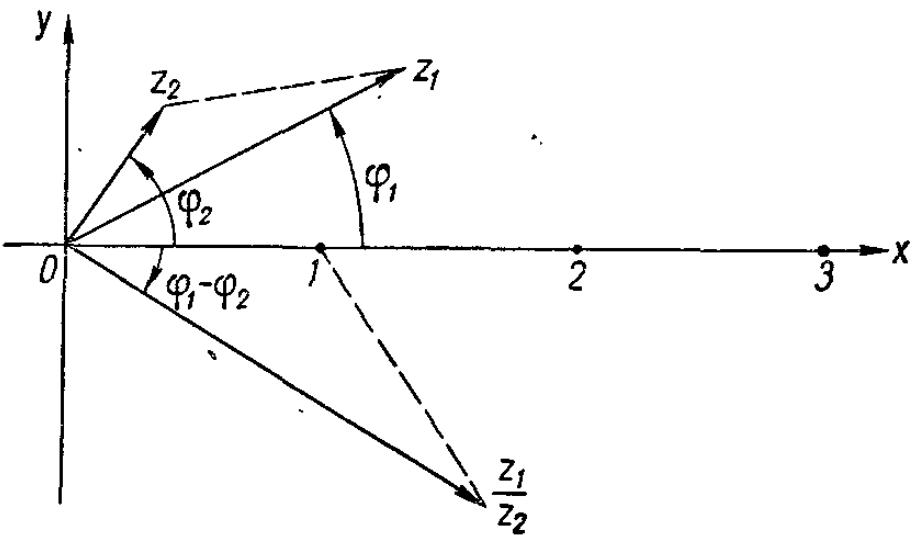


Рис. 5.

учесть, что треугольники соответственно с вершинами  $O, 1, \frac{z_1}{z_2}$  и  $O, z_2, z_1$  должны быть подобными (см. рис. 5).

Например, пусть вектор  $\overrightarrow{OM}$ , интерпретирующий комплексное число  $z = x + iy$ , задан своими полярными координатами  $r$  и  $\varphi$ . Построим вектор  $\overrightarrow{ON}$ , изображающий комплексное число  $\zeta = \frac{1}{z}$  (рис. 6).

Для искомого вектора полярные координаты следующие:

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \theta = -\varphi. \quad (1.54)$$

Если  $|z| > 1$ , то построение нужно проводить в следующем порядке. Строим точку  $M(x, y)$  с полярными координатами  $(r, \varphi)$ . Затем, описав единичную окружность с центром в начале координат  $O$ , через точку  $M(x, y)$  проводим касательную  $MT$  к окружности и опускаем перпендикуляр из точки касания  $T$  на  $OM$ .

Длина  $OK$  определяется из подобия  $\Delta OKT$  и  $\Delta OTM$ :

$$OK \cdot OM = OT^2,$$

откуда

$$OK = \frac{OT^2}{OM} = \frac{1}{r}.$$

Комплексное число, изображаемое вектором  $\overrightarrow{OK}$ , имеет полярные координаты  $\left(\frac{1}{r}, \varphi\right)$ , где  $\frac{1}{r} < 1$ .

Если же  $r < 1$ , то построение вектора с полярными координатами  $\left(\frac{1}{r}, \varphi\right)$  нужно проводить в обратном порядке: через заданную точку  $K(x, y)$  провести перпендикуляр  $KT$  до пересечения с единичной окружностью, а затем через точку  $T$  провести касательную до пересечения с лучом  $OM$ . Вектор  $\overrightarrow{OM}$  будет искомым (см. рис. 6).

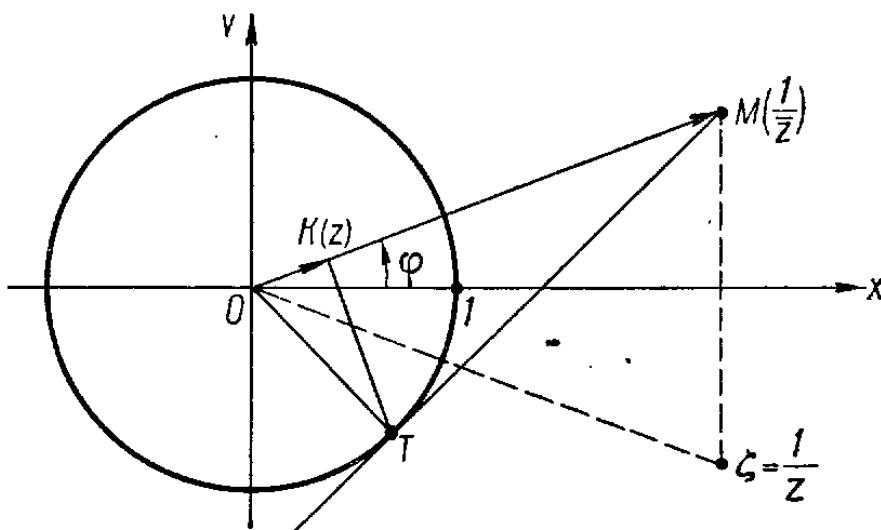


Рис. 6.

Таким образом, мы по заданной точке  $z$  построили точку  $\frac{1}{z}$ , которая называется *симметричной* относительно единичной окружности. Преобразование, определяемое формулой

$$\omega = \frac{R^2}{z}, \quad (1.55)$$

называется *инверсией* относительно окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат (точки  $z$  и  $\frac{R^2}{z}$  называются симметричными относительно окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат).

В общем случае точки  $\omega$  и  $z$  называются *симметричными относительно окружности*  $C$ , если они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности, и произведение их расстояний от центра  $C$  равно квадрату радиуса этой окружности.

Центр окружности  $C$  считается симметричным с бесконечно удаленной точкой  $z = \infty$ .

Если  $\omega$  — точка, симметричная с точкой  $z$  относительно окружности  $C$  радиуса  $R$  с центром в точке  $z = a$ , то *инверсия* определится следующим преобразованием:

$$\omega = a + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}. \quad (1.56)$$

Далее, чтобы построить вектор  $\overrightarrow{ON}$ , изображающий комплексное число  $\zeta = \frac{1}{z}$ , достаточно найти его конец — точку  $N$ , симметричную построенной ранее точке  $K$  (в случае  $r > 1$ ) или точке  $M$  (в случае  $r < 1$ ) относительно оси  $x$ -ов (см. рис. 6). Заметим, что симметрия относительно произвольной прямой  $l$  понимается в обычном смысле, а именно: точки  $w$  и  $z$  называются *симметричными относительно прямой  $l$* , если они лежат по разные стороны от этой прямой на одном и том же расстоянии от нее и соединяющий эти точки отрезок перпендикулярен к прямой  $l$ .

При возведении в целую степень комплексного числа  $z$  имеем

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg}(z^n) = = n \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad (1.57)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Поэтому геометрическое построение вектора, изображающего комплексное число  $z^n$ , не вызывает затруднений и проводится в той же последовательности, что и умножение.

*Извлечение корня  $n$ -й степени из комплексных чисел*, заданных в три-

гонометрической форме, производится по формулам (1.42), т. е. если  $|z| = r$ , а  $\arg z = \varphi$ , то полярные координаты  $(\rho, \theta)$  комплексного числа  $\sqrt[n]{z}$  определяются соотношениями

$$\rho = \sqrt[n]{r}; \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (1.58)$$

причем каждому значению комплексного числа  $(r, \varphi)$  соответствует  $n$  различных значений величины  $\sqrt[n]{z}$ , имеющих один и тот же модуль  $\rho = \sqrt[n]{r}$ , и аргументы (соответствующие двум значениям  $k$  и  $k+1$ ), отличающиеся один от другого на  $\frac{2\pi}{n}$ , так как

$$\frac{\varphi + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}. \quad (1.59)$$

Поэтому концы каждого из радиусов-векторов, изображающих  $n$  различных значений величины  $\sqrt[n]{z}$ , совпадают с вершинами правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $\rho$  с центром в начале координат  $O$ .

На рис. 7 построены векторы, изображающие шесть разных значений величины  $\sqrt[6]{z}$ .

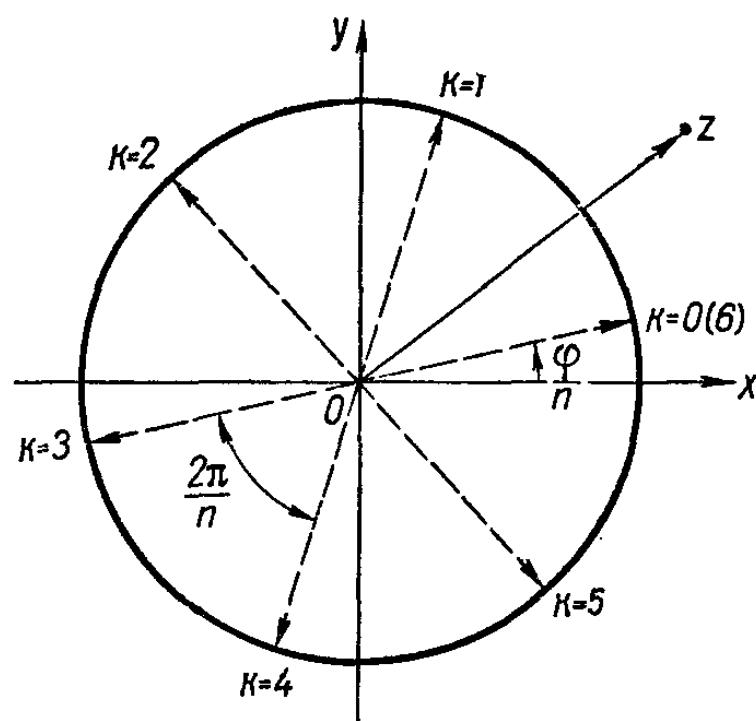


Рис. 7.

Если обозначить, как это принято для действительных чисел,

$$\sqrt[n]{z^m} = z^{\frac{m}{n}}, \quad (1.60)$$

то действие возвведения комплексного числа в степень окажется определенным для любого действительного рационального показателя (в этом случае дробь  $\frac{m}{n}$  должна быть несократимой, так как, например,

$\sqrt[4]{z^2}$  имеет четыре значения, тогда как  $\sqrt{z}$  — лишь два).

Определим действие возвведения числа  $e$  (основания натуральных логарифмов) в комплексную степень  $z = x + iy$  посредством следующих соотношений:

$$w = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{x+iy}; \quad (1.61)$$

$$\rho = e^x, \quad \varphi = y. \quad (1.62)$$

Объединяя (1.61) и (1.62), получим удобную для непосредственного вычисления величины  $w = e^z$  формулу, а именно:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1.63)$$

Такое определение действия возвведения числа  $e$  в комплексную степень не искусственно, ибо при  $y = 0$ , когда  $z = x$  является действительным числом, степень  $w = e^z$  превращается в обычную  $w = e^x$ , определенную для действительных чисел. Кроме того, введенная посредством равенства (1.63) степень сохраняет известные для случая действительного показателя свойства

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} e^{x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}; \quad (1.64)$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} [\cos(y_1 - y_2) + i \sin(y_1 - y_2)] = e^{z_1-z_2}.$$

Комплексные степени обладают свойствами, которых нет у действительных степеней.

Так, из равенства (1.63) получаем

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1, \quad (1.65)$$

в то время как действительная степень числа  $e$  равна единице лишь в случае равенства нулю показателя степени.

Далее, для любого целого  $k$  имеем

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z, \quad (1.66)$$

т. е. степень не меняется при добавлении к показателю целого кратного  $2\pi i$ .

Полагая в равенстве (1.63)  $x = 0$  и  $y = \varphi$ , получим так называемую *формулу Эйлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (1.67)$$

Исходя из тригонометрической формы комплексного числа (1.16) и соотношения (1.67), получим новую, *показательную форму* комплексного числа

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}, \quad (1.68)$$

которая благодаря ее компактности стала наиболее употребительной в теории функций комплексного переменного.

Учитывая, что  $r = |z|$  и  $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ , формулу (1.68) можно переписать так:

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = |z| e^{i(\arg z + 2k\pi)}, \quad (1.69)$$

где

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Действием, обратным возведению в степень, является логарифмирование. Поэтому комплексное число  $w$  является *логарифмом / (натуральным) комплексного числа  $z \neq 0$* , если оно определено равенством

$$e^w = z. \quad (1.70)$$

Натуральный логарифм числа  $z$  обозначается символом  $\ln z$ . Если положить  $w = u + iv$ , то учитывая (1.62), данное определение логарифма сводится к следующим двум соотношениям:

$$u = \ln |z|, \quad v = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad (1.71)$$

где взят обычный натуральный логарифм положительного числа  $|z|$ .

Следовательно, логарифмирование комплексных чисел сводится к обычному логарифмированию действительных чисел, т. е.

$$w = \ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi). \quad (1.72)$$

Формула (1.72) определяет бесконечное множество комплексных чисел — логарифмов числа  $z = x + iy$ . Из этого бесконечного множества выделяется одно, отвечающее значению  $k = 0$ , которое называется *главным значением логарифма* и обозначается символом  $\ln z$ .

Таким образом,

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z \quad (-\pi < \arg z \leq \pi). \quad (1.73)$$

Если  $z$  — действительное и положительное число ( $\arg z = 0$ ), то главное значение логарифма совпадает с обычным натуральным логарифмом.

Очевидно, для логарифмов комплексных чисел сохраняются известные для действительных чисел правила логарифмирования произведения и частного. Действительно,

$$\begin{aligned} \ln(z_1 z_2) &= \ln|z_1 z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \end{aligned}$$

и аналогично

$$\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2;$$

или, учитывая (1.73), последние равенства перепишем в виде

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + 2k\pi i; \quad (1.74)$$

$$\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2 + 2k\pi i,$$

где

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Дадим еще определение *действия возвведения комплексного числа  $z = re^{i\varphi}$  в комплексную степень  $a = \alpha + i\beta$*  при помощи равенства

$$z^a = e^{a \ln z}. \quad (1.75)$$

Учитывая формулу (1.72), получим

$$z^a = e^{(\alpha+i\beta) \ln z} = e^{\alpha \ln r - \beta(\phi + 2k\pi)} e^{i[\alpha(\phi + 2k\pi) + \beta \ln r]} \quad (1.76)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

## § 2. Функции комплексного переменного

**3. Основные геометрические понятия.** Так как комплексное число  $z = x + iy$  изображается на комплексной плоскости  $xOy$  точкой  $(x, y)$  или радиусом-вектором, проведенным из начала координат в точку  $(x, y)$ , то в дальнейшем мы не будем различать понятия «комплексное число  $z = x + iy$ », «точка плоскости  $(x, y)$  или  $z$ », «вектор  $z$ , определяющий собой число  $z = x + iy$ ». Например, будем говорить точка  $2 + 3i$ , треугольник с вершинами  $z_1, z_2$  и  $z_3$ , сумма векторов  $z_1$  и  $z_2$  и т. д. в зависимости от удобства изложения того или иного вопроса.

*Множество комплексных чисел* изображается на плоскости соответствующим множеством точек. Поэтому, говоря о комплексном числе  $z$ , будем подразумевать и точку, изображающую это число, и, наоборот, говоря о точке, будем подразумевать и число, изображением которого является точка  $(x, y)$ .

*Непрерывной кривой* называется множество точек, координаты которых  $(x, y)$  заданы параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (1.77)$$

где  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  — непрерывные функции вещественной переменной  $t$  на отрезке  $[a, b]$ .

Например, *эллипс*

$$x = a \cos t; \quad y = b \sin t, \quad (1.78)$$

где  $0 \leq t \leq 2\pi$  является непрерывной кривой, а *гипербола*

$$x = \frac{a}{\cos t}; \quad y = b \operatorname{tg} t, \quad (1.79)$$

где  $0 \leq t \leq 2\pi$ , не является непрерывной, так как функции  $\frac{a}{\cos t}$  и  $b \operatorname{tg} t$  при  $t = \frac{\pi}{2}$  и  $t = \frac{3\pi}{2}$  имеют точки разрыва.

Если начальная точка кривой совпадает с ее конечной точкой, то такая кривая называется *замкнутой*.

Кривая называется *гладкой*, если в каждой ее точке можно провести касательную, направление которой изменяется непрерывно, когда точка касания движется по кривой.

Непрерывная кривая называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких кривых.

*Областью* на комплексной плоскости называется множество  $D$  точек плоскости, обладающих следующими свойствами:

1) если какая-нибудь точка принадлежит данному множеству  $D$ , то и достаточно малый круг с центром в этой точке принадлежит  $D$  (свойство открытости);

2) любые две точки множества  $D$  можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат  $D$  (свойство связности).

Так, например, часть плоскости, заключенная внутри петлеобразной линии (рис. 8), не является областью, так как не выполняется



Рис. 8.

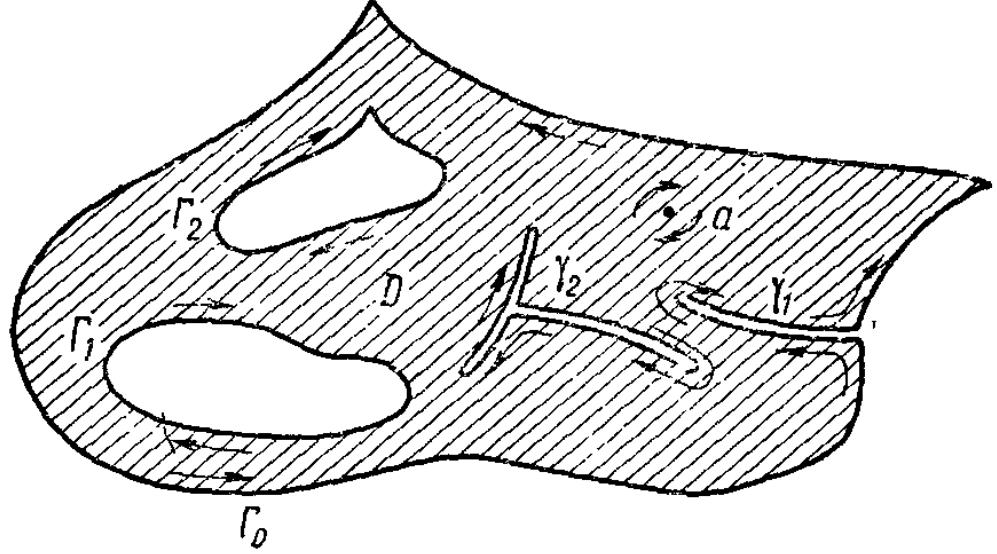


Рис. 9.

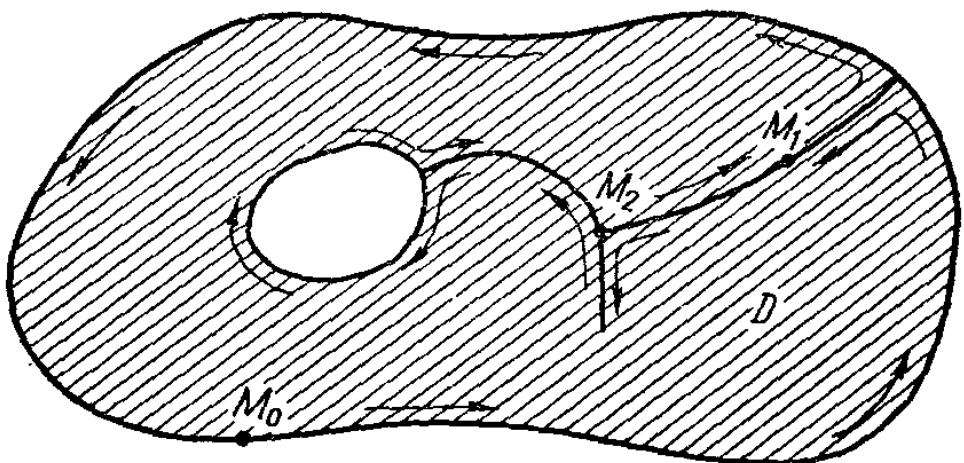


Рис. 10.

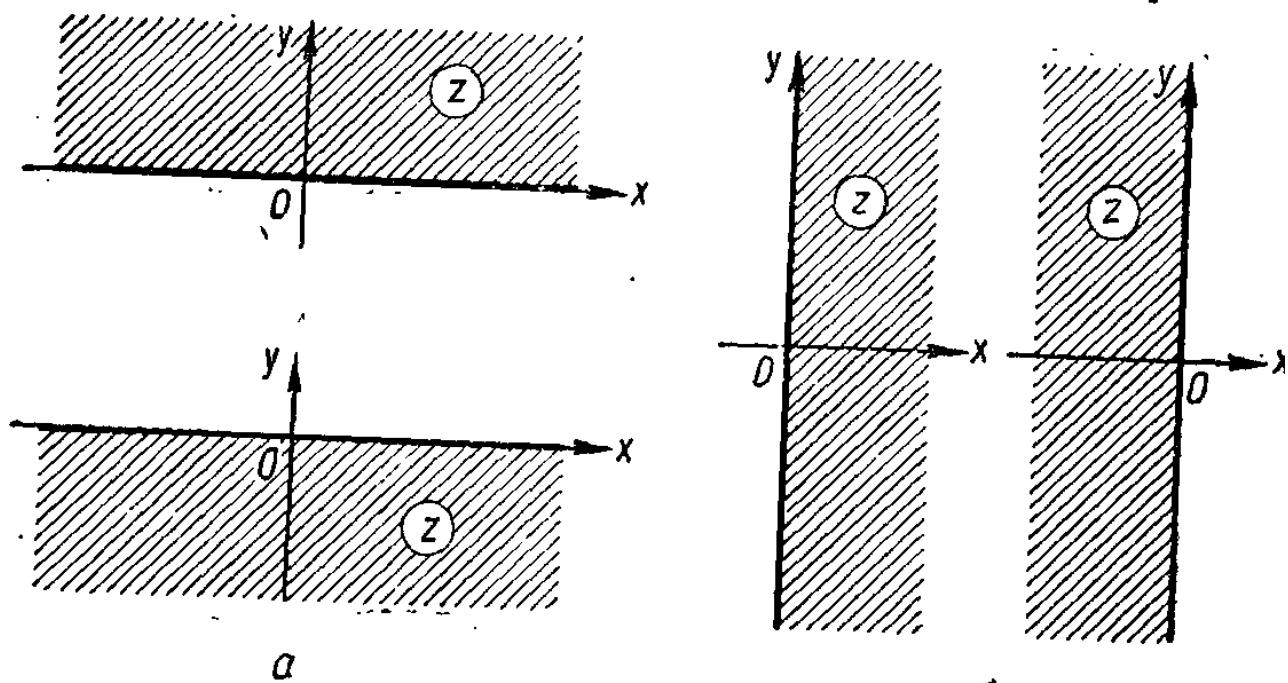


Рис. 11.

свойство связности: точки  $M_1$  и  $M_2$  нельзя соединить линией, находящейся внутри области (второе свойство нарушается).

Простыми примерами областей могут служить окрестности точек на комплексной плоскости. Под  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $z = z_0$  понимают открытый круг радиуса  $\varepsilon$  с центром в этой точке, т. е. совокупность точек  $z$ , удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \varepsilon. \quad (1.80)$$

*Границей* точки области  $D$  называется такая точка, которая сама не принадлежит  $D$ , но в любой ее  $\varepsilon$ -окрестности имеются точки этой области.

Совокупность всех граничных точек области  $D$  называется границей данной области. Область  $D$  с присоединенной к ней границей называется *замкнутой* областью и обозначается  $\overline{D}$ .

Граница области может состоять из замкнутых кусочно-гладких кривых, «разрезов» и точек. Например, на рис. 9 граница области состоит из трех замкнутых линий  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ , двух разрезов  $\gamma_1, \gamma_2$  и одной точки  $a$  (рассматриваемая область  $D$  на рисунке заштрихована).

Число связных частей, на которые разбивается граница области  $D$ , называется порядком связности этой области.

Например, область, изображенная на рис. 9, пятисвязна — ее граница распадается на пять связных частей 1)  $\Gamma_0, \gamma_1$ ; 2)  $\Gamma_1$ ; 3)  $\Gamma_2$ ; 4)  $\gamma_2$  и 5)  $a$ .

Если граница области  $D$  состоит из одной связной части (рис. 10), то  $D$  называется *односвязной* областью.

В дальнейшем будем рассматривать в основном односвязные области, граница которых состоит из кусочно-гладкой кривой с конечным числом разрезов. Кроме того, будем предполагать, что на границе области выбрано определенное направление обхода, т. е. при движении точки вдоль границы область остается либо только слева (положительное направление обхода), либо только справа (отрицательное направление обхода). При этом некоторые точки границы будут проходиться один раз (точка  $M_0$ ), другие несколько раз (например, точка  $M_1$  — два; точка  $M_2$  — три раза).

Если точка проходится один раз, она называется *простой* (точка  $M_0$ ), если же несколько раз, то называется *кратной* (точки  $M_1$  и  $M_2$ ). Число, показывающее сколько раз проходится точка, называется *кратностью* этой точки.

**4. Примеры некоторых односвязных областей.** Рассмотрим примеры областей, ограниченных различными кривыми (при этом предполагается, что кривая, ограничивающая данную область, может проходить и через бесконечно удаленную точку  $z = \infty$ ).

Если кривая может быть записана при помощи уравнения, то, очевидно, области, на которые разбивает эта кривая всю комплексную плоскость, легко задать при помощи соответствующих неравенств.

Так, например, верхняя и нижняя полуплоскости задаются соответственно неравенствами  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} z \leq 0$  (рис. 11, а), а правая и левая полуплоскости неравенствами  $\operatorname{Re} z \geq 0$ ,  $\operatorname{Re} z \leq 0$  (рис. 11, б).

Равенство  $|z| = 1$  выражает множество всех чисел, модуль которых равен единице, т. е. определяет окружность (рис. 12, а).

Область, представленная неравенством  $|z| < 1$ , является множеством точек, лежащих внутри единичной окружности (рис. 12, б), а область, представленная неравенством  $|z| > 1$ , является множеством точек, лежащих вне окружности (рис. 12, в).

Приведенные выше и некоторые другие простейшие области часто называют *каноническими областями*.

Зная уравнение границы области, легко при помощи соответствующих неравенств задать саму область. Запишем уравнения некоторых часто встречающихся кривых в комплексной форме.

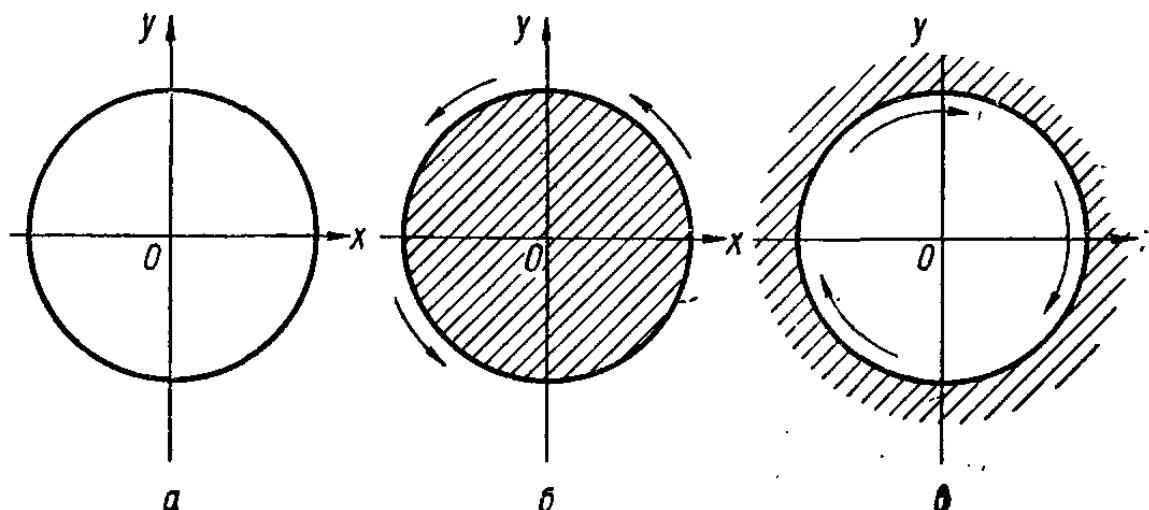


Рис. 12.

Пусть прямая  $l$  задана уравнением  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  — действительные числа. Тогда уравнение данной прямой в комплексной форме можно записать в виде

$$\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z) + \gamma = 0 \quad (1.81)$$

или

$$\operatorname{Im}(i\bar{\alpha}z) + \gamma = 0,$$

где  $a = \alpha + i\beta$ ,  $z = x + iy$ .

Расстояние от точки  $z_0$  до прямой  $l$  определяется по формуле

$$\alpha = \left| \frac{\operatorname{Re}(\bar{\alpha}z_0) + \gamma}{a} \right|, \quad (1.82)$$

а угол  $\varphi$  между прямой  $l$  и положительным направлением оси  $x$  (рис. 13) равен

$$\varphi = \arg a + \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.83)$$

Если точки  $(x, y)$  каждой кривой рассматривать как концы соответствующих радиусов векторов  $z$ , то легко записать уравнения известных из аналитической геометрии кривых (эллипса, гиперболы, параболы, овалов и др.), исходя из их определений как геометрических мест точек.

Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (1.84)$$

в комплексной форме принимает вид

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2\alpha, \quad (1.85)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — фокусы эллипса, а расстояние между фокусами равно  $|z_1 - z_2| = 2\delta$ , причем

$$\alpha^2 - \delta^2 = \beta^2. \quad (1.86)$$

Области, представляющие внутренность и внешность эллипса (рис. 14, а, б), соответственно можно задать неравенствами

$$|z - z_1| + |z - z_2| < 2\alpha; \quad (1.87)$$

$$|z - z_1| + |z - z_2| > 2\alpha. \quad (1.88)$$

Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (1.89)$$

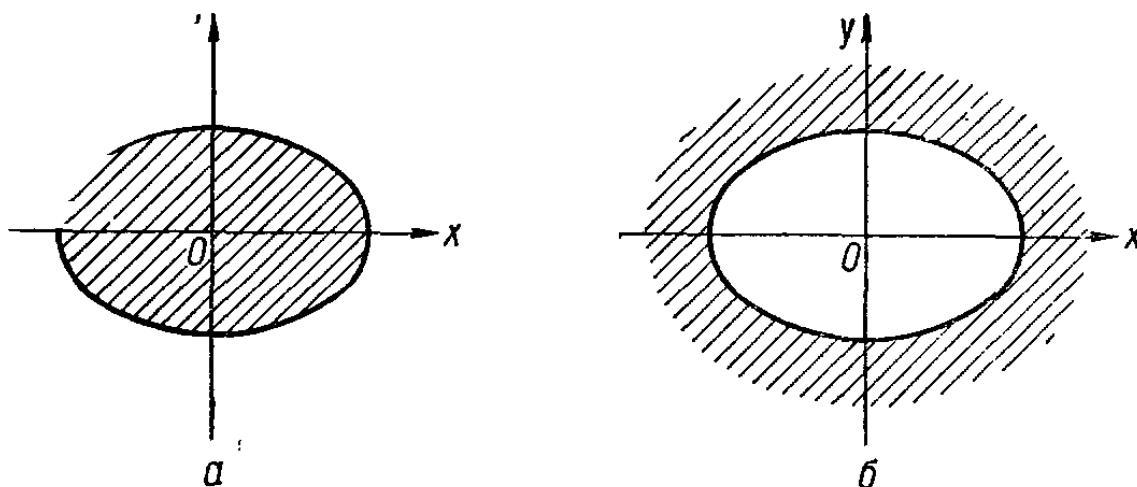


Рис. 14.

в комплексной форме принимает следующий вид\* :

$$|z - z_1| - |z - z_2| = \pm 2\alpha, \quad (1.90)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — фокусы гиперболы, а расстояние между фокусами равно  $|z_1 - z_2| = 2\delta$ , причем

$$\delta^2 - \alpha^2 = \beta^2. \quad (1.91)$$

Уравнение асимптот гиперболы (1.90) имеет вид

$$\operatorname{Im} \left\{ (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) e^{\pm i\Phi} \left( z - \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \right\} = 0, \quad (1.92)$$

причем

$$\cos \Phi = \frac{2\alpha}{|z_1 - z_2|}. \quad (1.93)$$

Если  $\alpha = \beta$ , то получим уравнение равнобочной гиперболы

$$\operatorname{Re} \left( \frac{z^2}{z_1^2} \right) = \frac{1}{2}. \quad (1.94)$$

Уравнение асимптот равнобочной гиперболы может быть записано в одном из следующих видов:

$$\operatorname{Re} \left( \frac{z^2}{z_1^2} \right) = 0; \quad \operatorname{Re} \left( \frac{z}{z_1} \right) = \pm \operatorname{Im} \left( \frac{z}{z_1} \right); \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{(1 \pm i)z}{z_1} \right\} = 0, \quad (1.95)$$

где  $z_1^2 = \delta^2 = 2\alpha^2$ .

\* Здесь уравнение гиперболы, как и эллипса, записано в общем виде.

Область, представляющую собою внешность гиперболы, не содержащую фокусов (рис. 15, а), можно теперь задать при помощи неравенства

$$||z - z_1| - |z - z_2|| < 2\alpha.$$

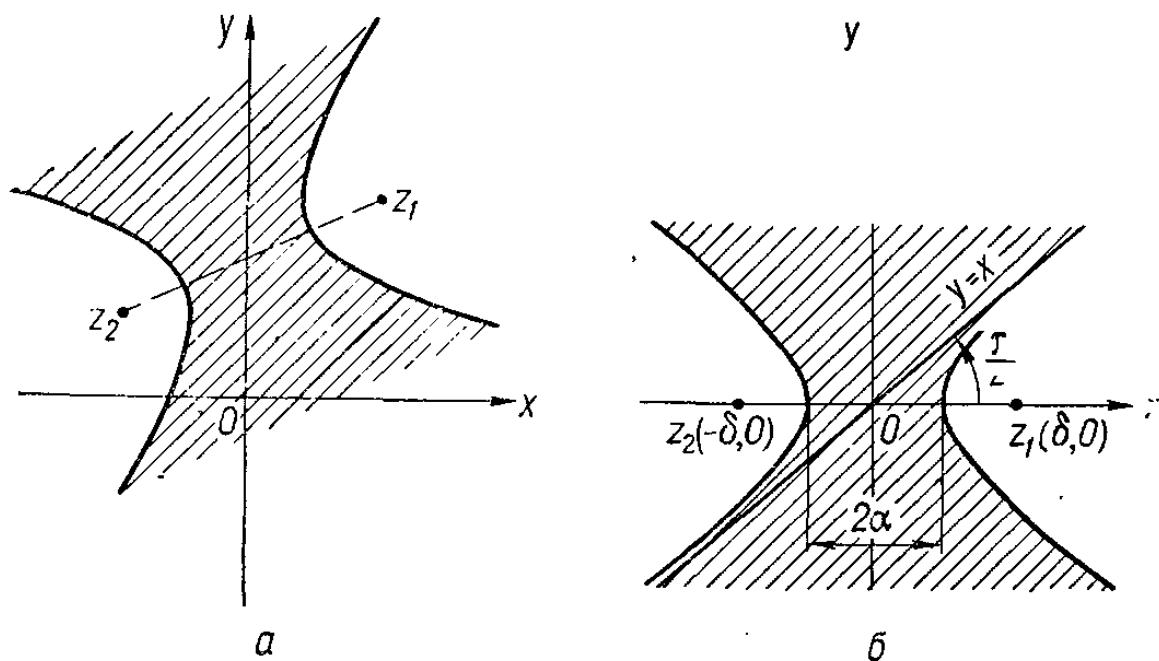


Рис. 15.

В случае равнобочкой гиперболы (рис. 15, б) внешность, не содержащая фокусов  $z_1(\delta, 0)$  и  $z_2(-\delta, 0)$ , задается неравенством

$$-\infty \leqslant \operatorname{Re} \left( \frac{z^2}{2\alpha^2} \right) < \frac{1}{2}. \quad (1.97)$$

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px \quad (1.98)$$

в комплексной форме записывается так

$$|z - z_0| = z_0 + \operatorname{Re} z, \quad (1.99)$$

а область, представляющую собой внутренность этой параболы (рис. 16), легко задать при помощи следующего неравенства:

$$|z - z_0| < z_0 + \operatorname{Re} z, \quad (1.100)$$

$$\text{где } z_0 = \frac{p}{2}.$$

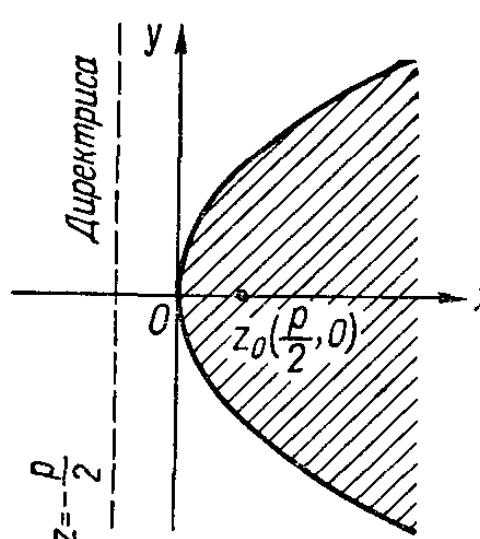


Рис. 16.

*Овал Кассини* определяется как геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек равно постоянной величине. Его каноническое уравнение в декартовой системе координат:

$$(x^2 + y^2) - 2\delta^2(x^2 - y^2) = \alpha^4 - \delta^4, \quad (1.101)$$

где  $2\delta$  — расстояние между фокусами  $F_1$  и  $F_2$ , а константа  $\alpha^2$  равна произведению  $MF_1MF_2$  (рис. 17, а).

В полярных координатах уравнение овала следующее:

$$\rho^2 = \delta^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{\delta^4 \cos 2\varphi + (\alpha^4 - \delta^4)}. \quad (1.102)$$

Форма кривой зависит от отношения  $\alpha$  к  $\delta$ . Если  $\alpha > \delta\sqrt{2}$ , то овал Кассини — выпуклая кривая (эллисообразный овал), имеющая вид I; если  $\delta < \alpha < \delta\sqrt{2}$ , то овал имеет «талию» — вид кривой II; если  $\alpha = \delta$ , то овал Кассини вырождается в лемнискату Бернулли и имеет вид кривой III (см. рис. 17, а).

Уравнение лемнискаты в декартовых координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\alpha^2(x^2 - y^2) = 0, \quad (1.103)$$

в полярных координатах:

$$\rho = \alpha \sqrt{2 \cos 2\varphi}. \quad (1.104)$$

Уравнение овала Кассини в комплексной форме имеет вид

$$|z - z_1| |z - z_2| = \alpha^2, \quad (1.105)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — фокусы.

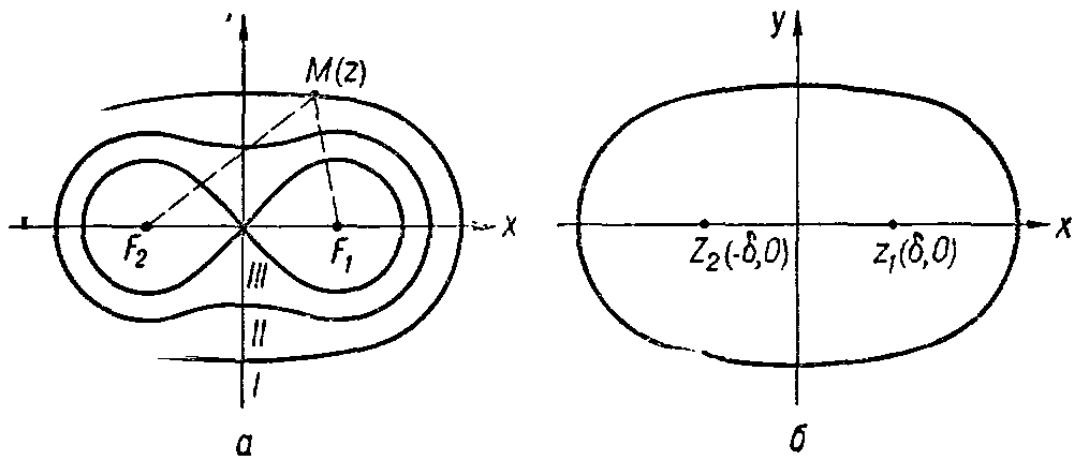


Рис. 17.

если же  $\alpha^2 = \delta^2 = \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}$ , то получаем уравнение лемнискаты Бернулли в комплексной форме:

$$4|z - z_1| |z - z_2| = |z_1 - z_2|^2. \quad (1.106)$$

Очевидно, область, представляющая собой внутренность овала Кассини (рис. 17, б), задается неравенством

$$|z - z_1| |z - z_2| < \alpha^2. \quad (1.107)$$

Таким образом, получив уравнения ряда кривых в комплексной форме, можно легко задать ту или иную область при помощи соответствующего неравенства. Такое аналитическое задание областей при помощи неравенств нам потребуется в дальнейшем.

**5. Понятие функции и отображения.** Если каждому комплексному числу  $z$  из множества  $g$  поставлено в соответствие одно (в случае однозначной функции) или несколько (в случае многозначной функции) комплексных чисел  $w$  из множества  $G$ , то говорят, что  $w$  есть *функция комплексного переменного  $z$* , определенная (заданная) на множество  $g$ , и пишут

$$w = f(z). \quad (1.108)$$

Переменная  $w$  называется  *зависимой переменной* или *функцией*, а переменная  $z$  — *независимой переменной* или *аргументом*.

*Множество*, на котором задается функция, называется *областью определения* (или *существования*) функции. Таким множеством может быть, например, совокупность комплексных чисел  $z$ , изображающих на

плоскости одну из рассмотренных в предыдущем пункте областей (внутренность или внешность окружности, эллипса и т. д.).

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать функции, заданные в областях, т. е. множества  $g$  и  $G$  будем считать областями.

Для изучения многозначных функций важное значение имеет рассмотрение их однозначных ветвей.

*Однозначная функция  $f(z)$  называется однозначной ветвью многозначной функции  $F(z)$ , если значение  $f(z)$  в каждой точке  $z$  совпадает с одним из значений  $F(z)$ .*

Очевидно, если задана функция (1.108), то не только ставится в соответствие каждому числу  $z$  одно или несколько чисел  $w$ , но и наоборот, каждому числу  $w$  соответствует определенное число  $z$  (одно или несколько). Поэтому, решив уравнение  $w = f(z)$  относительно  $z$ , получим новую функцию

$$z = F(w), \quad (1.109)$$

которая называется *обратной* по отношению к функции (1.108) \* .

Например, для функции  $w = 2z - (4 + 3i)$  обратной будет  $z = \frac{1}{2}[w + (4 + 3i)]$ , а для функции  $w = z^2$  обратной будет двузначная функция  $z = \pm\sqrt{w}$ , причем,  $z = +\sqrt{w}$  является ее однозначной ветвью.

Функция (1.108) каждому комплексному числу  $z = x + iy$  ставит в соответствие комплексное число  $w = u + iv$ , или, другими словами, каждой паре действительных чисел  $(x, y)$  ставит в соответствие пару действительных чисел  $(u, v)$ . Это значит, что каждое из действительных значений  $u$  и  $v$  находится по заданным действительным значениям  $x$  и  $y$ , т. е.  $u$  и  $v$  — функции двух действительных переменных  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$ . Поэтому (1.108) можно записать в виде

$$w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (1.110)$$

Чтобы перейти от записи вида (1.108) к виду (1.110), — этот переход называется разделением действительной и мнимой частей функции, — необходимо вместо  $w$  подставить  $u + iv$ , а вместо  $z$  подставить  $x + iy$ , выполнить указанные действия и затем действительную часть приравнять  $u$ , а мнимую —  $v$ .

Например, если задана функция  $w = \frac{1}{z}$ , то

$$w = u + iv = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Иногда выполнить такие действия значительно легче, если переписать  $z$  в тригонометрическом виде  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Пусть задана функция  $w = z^n$ , тогда

$w = u + iv = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ ,  
откуда

$$u = r^n \cos n\varphi; \quad v = r^n \sin n\varphi.$$

\* Не всегда равенство (1.108) можно решить относительно  $z$  и, следовательно, записать функцию (1.109) в явном виде. Функции (1.108) и (1.109) могут быть заданы неявно, т. е. в виде  $F_1(w, z) = 0$ .

Таким образом, задание функции комплексного переменного  $w = f(z)$  на множестве  $g$  равносильно заданию на этом множестве двух действительных функций

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \psi(x, y). \quad (1.111)$$

Если же систему уравнений (1.111) решить относительно  $x$  и  $y$ , то получим новую систему \*

$$x = \Phi(u, v); \quad y = \Psi(u, v), \quad (1.112)$$

равносильную заданию функции комплексного переменного (1.109), обратной по отношению к (1.108).

Перейдем теперь к выяснению понятия *непрерывности* функции, которое непосредственно связано с новой математической операцией — *пределным переходом*.

Комплексное число  $a$  называется *пределом функции*  $f(z)$  при  $z$ , стремящемся к  $z_0$ ,

$$a = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z),$$

если для любой сколь угодно малой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  можно найти такую  $\delta$ -окрестность точки  $z_0$ , что для всех точек  $z$  из  $\delta$ -окрестности (кроме, быть может, самой точки  $z_0$ ) соответствующие значения функции  $f(z)$  будут изображаться точками  $\varepsilon$ -окрестности.

Следует отметить, что это определение одинаково справедливо как для конечных, так и бесконечных  $z_0$  и  $a$ .

Так, если  $z_0$  и  $a$  — конечные числа, то это определение равносильно следующему: равенство

$$a = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad (1.113)$$

означает, что как бы мало ни было число  $\varepsilon > 0$ , для него всегда найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех значений  $z$  ( $z \neq z_0$ ), удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \delta, \quad (1.114)$$

выполняется неравенство.

$$|f(z) - a| < \varepsilon. \quad (1.115)$$

Если же, например,  $z_0 \neq \infty$ , а  $a = \infty$ , то равенство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad (1.116)$$

означает, что как бы мало ни было положительное число  $\varepsilon$ , для него всегда найдется достаточно большое положительное число  $b$ , при котором для всех значений  $z$  ( $z \neq z_0$ ), удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \delta, \quad (1.117)$$

будет выполняться неравенство

$$|f(z)| > b. \quad (1.118)$$

Введенные определения ничем не отличаются от определений предела функции действительного переменного, следовательно, все теоремы о пределах остаются в силе и для функций комплексного переменного.

\* См. сноску на стр. 26.

Функция  $w = f(z)$  называется непрерывной в точке  $z = z_0$ , если существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  и его значение совпадает со значением функции в точке  $z_0$ , т. е.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \neq \infty. \quad (1.119)$$

На языке неравенств это определение принимает следующую формулировку: функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z = z_0$ , если для любого  $\epsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $z^*$ , удовлетворяющих неравенству

$$|z - z_0| < \delta, \quad (1.120)$$

имеет место неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon. \quad (1.121)$$

Положим  $z - z_0 = \Delta z$  и назовем эту величину *приращением аргумента*, а величину  $f(z) - f(z_0) = \Delta w$  назовем *приращением функции*. Тогда условие непрерывности на языке приращений выразится следующим образом:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0. \quad (1.122)$$

Функция, непрерывная в каждой точке области  $g$ , называется *непрерывной в этой области*.

Так, например, функция  $w = z^2$  однозначна и непрерывна во всей плоскости  $z$ , а функция  $w = \arg z$  однозначна и непрерывна для всех  $z \neq 0$  и  $z \neq \infty$ , не лежащих на отрицательной полуоси, ибо для точек  $z_0$ , лежащих на отрицательной полуоси, условие (1.119) не выполняется в силу данного ранее определения (1.14).

Пусть задана непрерывная функция комплексного переменного  $w = f(z)$  на некотором множестве  $g$ . Какова ее геометрическая интерпретация?

Когда рассматривается функциональная связь между действительными переменными  $y = f(x)$ , то геометрически эту связь можно представить, строя для каждой пары соответствующих друг другу значений  $x$  и  $y$  точку плоскости  $xOy$  с прямоугольными координатами  $(x, y)$ . Геометрическое место таких точек дает кривую, которая и выражает геометрически функцию  $y = f(x)$ .

В случае же комплексных переменных, поступая аналогично, нужно было бы строить точку для каждой пары соответствующих друг другу комплексных чисел  $z = x + iy$  и  $w = u + iv$ . Но такая точка должна определяться четырьмя действительными координатами  $(x, y, u, v)$ , что невозможно ни на плоскости, имеющей два измерения, ни в пространстве, имеющем три измерения.

Поэтому для геометрического истолкования функции комплексного переменного поступим следующим образом: возьмем две плоскости; на одной из них ( $z$ -плоскости) будем изображать комплексные числа  $z$  из множества  $g$ , на другой ( $w$ -плоскости) — соответствующие комплексные числа  $w$  из множества  $G$  (рис. 18, а, б).

Следовательно, если значения переменной  $z$  изображать при помощи точек (коцов радиусов-векторов) некоторой плоскости ( $z$ -плоскости), а значения функции  $w$  при помощи точек (концов радиусов-векторов) другой плоскости ( $w$ -плоскости), то функция  $w = f(z)$  устанавливает

\* Здесь в отличие от определения предела не исключается значение  $z = z_0$ , ибо при  $z = z_0$  неравенство (1.121) заведомо выполняется в силу (1.119).

отношение между точками множества  $g$ , на котором функция определена, и точками множества  $G$ , изображающими комплексные значения функции  $w$ . В этом случае будем говорить, что функция  $w = f(z)$  осуществляет *отображение* точек плоскости  $z$  на соответствующие точки плоскости  $w$ .

Точки множества  $G$ , изображающие комплексные значения функции  $w = f(z)$ , называются *образами* соответствующих точек множества  $g$ , на котором определена данная функция. Точки множества  $g$  называются *пробразами* соответствующих точек множества  $G$  (рис. 18, а, б).

Если точка  $a$  описывает некоторую непрерывную кривую  $l$  в плоскости  $z$ , то ее образ  $A$  описывает в плоскости  $w$  некоторую, вообще говоря, другую непрерывную кривую  $L$ , т. е. функция  $w = f(z)$  в данном случае

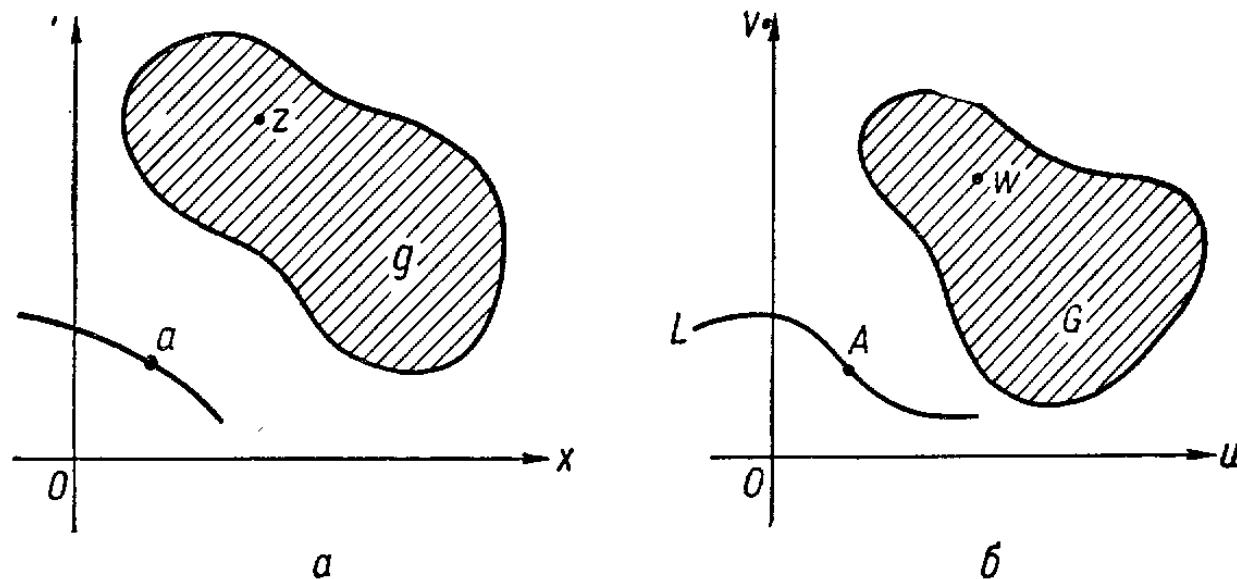


Рис. 18.

существует непрерывное отображение (иногда говорят — преобразование) кривой  $l$  плоскости  $z$  на кривую  $L$  плоскости  $w$ .

Пусть кривая  $l$  в плоскости  $z$  задана уравнением

$$f_1(x, y) = 0. \quad (1.123)$$

Чтобы найти уравнение кривой  $L$  в плоскости  $w$ , на которую отображается кривая  $l$  при помощи функции  $w = f(z)$ , нужно исключить  $x$  и  $y$  из уравнений (1.111) и (1.123).

Если же кривая  $l$  задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (1.124)$$

то, подставляя (1.124) в (1.111), получим уравнение кривой  $L$  также в параметрическом виде.

Пусть кривая  $l$  задана в плоскости  $z$  уравнением в комплексной форме

$$\varphi_1(z) = 0. \quad (1.125)$$

Примеры таких уравнений были рассмотрены нами в п. 4. Чтобы найти уравнение образа  $L$  заданной кривой  $l$  в плоскости  $w$ , достаточно в (1.125) подставить значение  $z$ , определяемое соотношением (1.109). Полученное уравнение  $\varphi_1[f(w)] = 0$  и будет искомым.

Если в плоскости  $z$  взять множество точек, образующих область  $g$ , то совокупность образов этих точек в плоскости  $w$  образует некоторую область  $G$ . Однако не всякая функция комплексного переменного отображает кривую в кривую, а область в область.

Если однозначная функция  $w = f(z)$  такова, что и обратная по отношению к ней функция  $z = F(w)$  также однозначна, то каждой точке множества  $g$  соответствует в плоскости  $w$  одна и только одна точка множества  $G$  и, обратно, каждой точке множества  $G$  соответствует в плоскости  $z$  только одна точка множества  $g$ .

В этом случае отображение, осуществляющее функцией  $w = f(z)$ , называется *взаимно однозначным* или *однолистным*, а функция  $w = f(z)$  называется *однолистной* на множестве  $g$ .

В дальнейшем мы будем иметь дело главным образом с однолистными отображениями.

Таким образом, каждая из функций комплексного переменного вида (1.108) или соответствующая ей пара функций от двух действительных

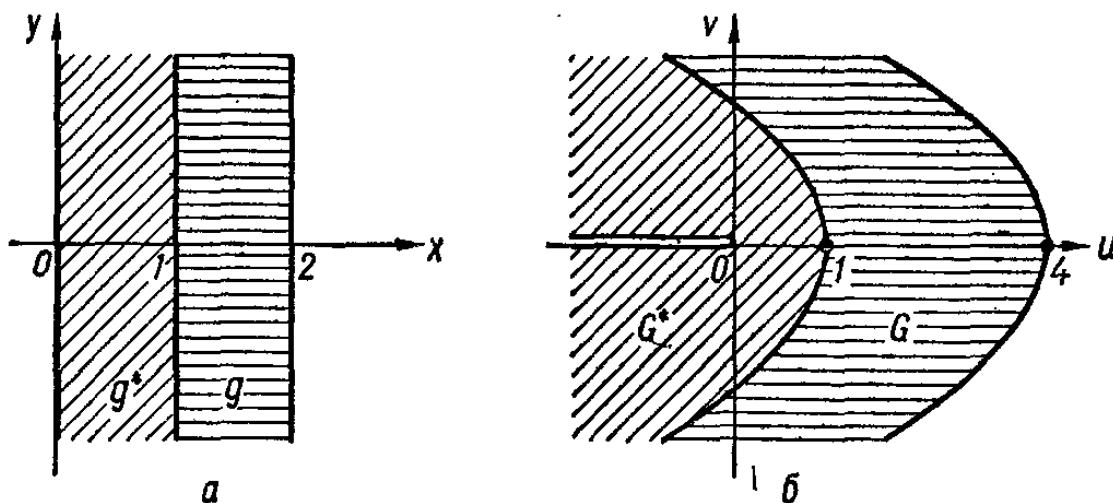


Рис. 19.

переменных вида (1.111) осуществляет преобразование или отображение некоторого заданного множества точек  $g$  плоскости  $z$  в некоторое другое множество точек  $G$  плоскости  $w$ , а обратная функция вида (1.109) или соответствующая ей система (1.112) осуществляет отображение некоторого множества точек  $G'$  (вообще говоря, не совпадающего с  $G$ ) плоскости  $w$  на множество точек  $g'$  (вообще говоря, не совпадающее с  $g$ ) плоскости  $z$ .

Если функция однолистна в  $g$ , то  $g$  совпадает с  $g'$ , а  $G$  с  $G'$ .

В качестве примера рассмотрим функцию  $w = z^2$  и найдем, в какую кривую она отображает прямую  $z = \alpha$ . Отделяя действительную и мнимую части, находим

$$u = x^2 - y^2; \quad v = 2xy.$$

Исключая  $y$  и положив  $x = \alpha$ , получим уравнение искомой кривой в плоскости  $w$

$$u = \alpha^2 - \left( \frac{v}{2\alpha} \right)^2$$

или

$$v^2 = -4\alpha^2(u - \alpha^2),$$

а это — уравнение параболы.

Следовательно, прямая  $x = \alpha$  при помощи функции  $w = z^2$  отображается в параболу  $v^2 = -4\alpha^2(u - \alpha^2)$  (рис. 19). Совокупность точек  $g$ , расположенных между прямыми  $x = 1$  и  $x = 2$  (вертикальная полоса), при помощи функции  $w = z^2$  отобразится в совокупность точек  $G$ , лежащих между параболами  $v^2 = -4(u - 1)$  и  $v^2 = -16(u - 4)$ . Совокупность точек  $g^*$ , расположенных внутри полосы  $x = 0$  и  $x = 1$ , при помощи функции  $w = z^2$  отобразится в совокупность точек  $G^*$ , рас-

положенных между параболой  $v^2 = -4(u - 1)$  и «параболой»  $v^2 = 0$ , т. е. совокупность  $G^*$  представляет внутренность параболы  $v^2 = -4(u - 1)$  с разрезом по отрицательной действительной оси (рис. 19, б). Функция  $w = z^2$  отображает сектор  $g$ , точки которого определяются неравенствами

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \quad |z| < 1,$$

на сектор  $G$  (рис. 20), определяемый неравенствами

$$0 < \arg w < \frac{\pi}{2}, \quad |w| < 1.$$

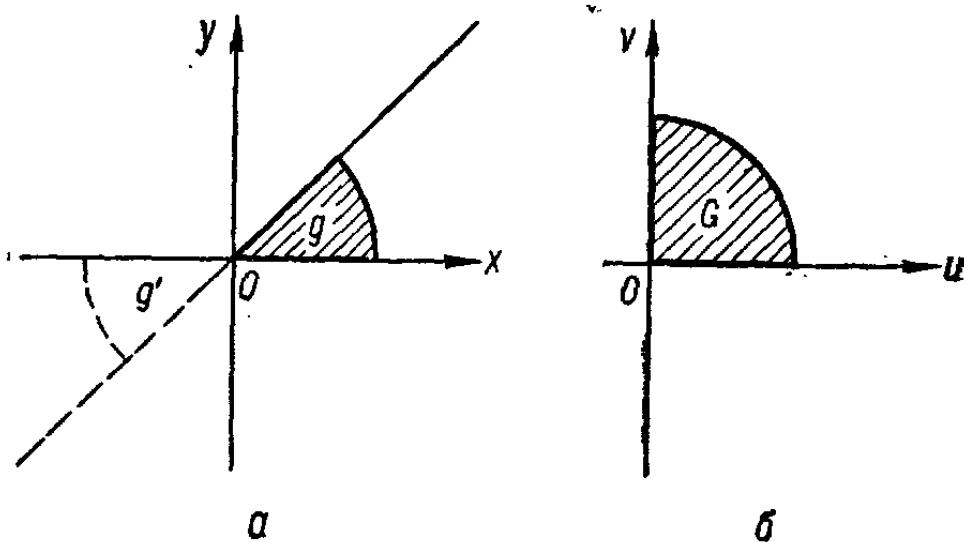


Рис. 20.

Это непосредственно следует из того, что

$$\arg w = \arg(z^2) = 2\arg z; \quad |w| = |z^2| = |z|^2.$$

Отображение  $g$  на  $G$  взаимно однозначно, хотя функция  $z = \pm\sqrt{w}$  — двузначна. Действительно, из любых двух точек  $z_1$  и  $z'_1$  ( $z_1 = -z'_1$ ) прообразов соответствующей точки  $w_1$  лишь одна принадлежит области  $g$ . Другими словами, область  $G$  отображается на область  $g$  при помощи однозначной ветви функции  $z = \sqrt{w}$  (другая ветвь функции  $z = -\sqrt{w}$  отображает область  $G$  на  $g'$ ).

**6. Основные элементарные функции. Дробно-линейной функцией называется функция вида**

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.126)$$

где  $a, b, c$  и  $d$  — произвольные комплексные постоянные, подчиненные условию \*

$$ad - bc \neq 0. \quad (1.127)$$

Частным случаем дробно-линейной функции является целая линейная функция

$$w = az + b. \quad (1.128)$$

\* Если  $ad - bc = 0$ , то  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  и функция сводится к тождественной постоянной  $w = c$ .

Степенная функция, согласно (1.75), имеет вид

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \quad (1.129)$$

где  $a$  — произвольное комплексное число. Так как логарифм имеет бесконечное множество значений, то функция (1.129) — многозначна. В частности, когда  $a = k$  — целое число, все значения функции совпадают.

Показательная функция определяется, согласно (1.61) и (1.62), следующим образом:

$$w = e^z = e^{x+iy}. \quad (1.130)$$

Показательная функция однозначна во всей плоскости и при этом имеет мнимый период  $2\pi i$ , ибо  $e^{z+2k\pi i} = e^z$  при любом целом  $k$ .

Логарифмическая функция определяется как обратная показательной, т. е.

$$w = \operatorname{Ln} z, \quad (1.131)$$

если  $e^w = z = e^{\operatorname{Ln} z}$ .

В соответствии с изложенным в п. 2 имеем

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i (\arg z - 2k\pi) \quad (1.132)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Ввиду многозначности величины  $\operatorname{Arg} z$ , как было уже показано, логарифм является многозначной функцией (действительная часть логарифма, равная  $\ln |z|$ , определяется однозначно, а мнимая содержит неопределенное слагаемое, кратное  $2\pi$ ).

Главное значение логарифма, которое определяется равенством

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

является однозначной ветвью функции (1.132).

Тригонометрические функции определим через показательные следующим образом:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad (1.133)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad (1.134)$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \quad (1.135)$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}. \quad (1.136)$$

Как уже отмечалось в п. 2, показательная и тригонометрические функции связаны формулой Эйлера (1.67):

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

На определенные таким образом тригонометрические функции в комплексной плоскости распространяются все формальные преобразования и соотношения, которые имеют место для действительного аргумента.

мента. Так, например, для того чтобы убедиться в справедливости основного тригонометрического тождества

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad (1.137)$$

достаточно подставить выражения (1.133) и (1.134) в (1.137).

Формулы сложения при любых комплексных значениях  $z_1$  и  $z_2$  имеют вид

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2; \quad (1.138)$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2; \quad (1.139)$$

$$\operatorname{tg}(z_1 \pm z_2) = \frac{\operatorname{tg} z_1 \pm \operatorname{tg} z_2}{1 \mp \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2}; \quad (1.140)$$

$$\operatorname{ctg}(z_1 \pm z_2) = \frac{\operatorname{ctg} z_1 \operatorname{ctg} z_2 \mp 1}{\operatorname{ctg} z_1 \pm \operatorname{ctg} z_2}. \quad (1.141)$$

*Гиперболические функции* определяются при помощи равенств

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad (1.142)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \quad (1.143)$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \quad (1.144)$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \quad (1.145)$$

Сравнивая (1.133), (1.134), (1.135) и (1.136) соответственно с выражениями (1.142), (1.143), (1.144) и (1.145), получим важные для дальнейшего формулы, выражающие гиперболические функции через тригонометрические:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz; \quad (1.146)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz; \quad (1.147)$$

$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz; \quad (1.148)$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{\operatorname{th} z} = i \operatorname{ctg} iz. \quad (1.149)$$

Из этих тождеств, в частности, следует периодичность гиперболических функций, причем периоды  $\operatorname{sh} z$  и  $\operatorname{ch} z$  равны  $2\pi i$ , а периоды  $\operatorname{th} z$  и  $\operatorname{cth} z$  равны  $\pi i$ .

Воспользовавшись соотношениями (1.146) и (1.147), из (1.138) и (1.139) получаем:

$$\sin[i(z_1 + z_2)] = \sin iz_1 \cos iz_2 + \cos iz_1 \sin iz_2,$$

$$\cos[i(z_1 + z_2)] = \cos iz_1 \cos iz_2 - \sin iz_1 \sin iz_2.$$

Отсюда выводим формулы сложения для гиперболических функций:

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2; \quad (1.150)$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2. \quad (1.151)$$

Аналогично из (1.140) и (1.141) получаем

$$\operatorname{th}(z_1 \pm z_2) = \frac{\operatorname{th} z_1 \pm \operatorname{th} z_2}{1 \pm \operatorname{tanh} z_1 \operatorname{tanh} z_2}; \quad (1.152)$$

$$\operatorname{cth}(z_1 \pm z_2) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} z_1 \operatorname{cth} z_2}{\operatorname{cth} z_1 \pm \operatorname{cth} z_2}. \quad (1.153)$$

Из соотношений (1.146) — (1.149) выводим формулы, выражающие тригонометрические функции через гиперболические,

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz; \quad (1.154)$$

$$\cos z = \operatorname{ch} iz; \quad (1.155)$$

$$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz; \quad (1.156)$$

$$\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz. \quad (1.157)$$

Легко заметить, что формулы (1.146) — (1.149) и (1.154) — (1.157) симметричны относительно символов.

*Обратные тригонометрические функции* определяются как функции, обратные по отношению к тригонометрическим.

Функция  $w$  называется *арксинусом* переменного  $z$  и обозначается

$$w = \operatorname{Arcsin} z,$$

если справедливо равенство

$$z = \sin w.$$

Аналогично, если

$$z = \cos w,$$

то  $w$  называется *арккосинусом*  $z$  и обозначается

$$w = \operatorname{Arcos} z.$$

Если  $z = \operatorname{tg} w$ , то  $w$  называется *арктангенсом*  $z$  и обозначается

$$w = \operatorname{Arctg} z,$$

если же  $z = \operatorname{ctg} w$ , то  $w$  называется *арккотангенсом*  $z$  и обозначается

$$w = \operatorname{Arccctg} z.$$

Учитывая (1.142), имеем

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i},$$

откуда

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Решив последнее уравнение относительно  $e^{iw}$ , найдем

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{-z^2 + 1},$$

откуда

$$iw = \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

или

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}). \quad (1.158)$$

Точно таким же способом легко получить

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1}); \quad (1.159)$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}; \quad (1.160)$$

$$\operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{z-i}{z+i}. \quad (1.161)$$

В силу многозначности логарифма и двузначности корня все обратные тригонометрические функции многозначны.

Функции, обратные по отношению к  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{th} z$  и  $\operatorname{cth} z$  называются *обратными гиперболическими функциями* (*ареа-синус*, *ареа-косинус*, *ареа-тангенс*, *ареа-котангенс*) и обозначаются соответственно

$$w = \operatorname{Arsh} z, \quad w = \operatorname{Arch} z, \quad w = \operatorname{Arth} z, \quad w = \operatorname{Arcth} z.$$

Учитывая соотношения (1.142) — (1.145), легко получить

$$\operatorname{Arsh} z = \ln (z \pm \sqrt{z^2 + 1}); \quad (1.162)$$

$$\operatorname{Arch} z = \pm \ln (z \pm \sqrt{z^2 - 1}); \quad (1.163)$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}; \quad (1.164)$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}. \quad (1.165)$$

Многозначность обратных гиперболических функций является следствием многозначности логарифма и квадратного корня (для первых двух функций).

Если в правых частях формул (1.158) — (1.161) и (1.162) — (1.165) взять главное значение логарифма, согласно формуле (1.73), то получим соответствующие главные значения обратных тригонометрических и обратных гиперболических функций.

Запишем некоторые важные соотношения между обратными тригонометрическими (круговыми) функциями:

$$\begin{aligned} \arcsin z = -\arcsin (-z) &= -\frac{\pi}{2} - \arccos z = \arccos \sqrt{1-z^2} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}; \end{aligned} \quad (1.166)$$

$$\arccos z = \pi - \arccos (-z) = \arcsin \sqrt{1-z^2} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}; \quad (1.167)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} z = -\operatorname{arctg} (-z) &= -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} z = \arcsin \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \\ &= \arccos \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}; \end{aligned} \quad (1.168)$$

$$\operatorname{arcctg} z = \pi - \operatorname{arcctg} (-z) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \arccos \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}; \quad (1.169)$$

$$\arcsin z_1 \pm \arcsin z_2 = \arcsin \left( z_1 \sqrt{1-z_2^2} \pm z_2 \sqrt{1-z_1^2} \right); \quad (1.170)$$

$$\arccos z_1 \pm \arccos z_2 = \arccos \left( z_1 z_2 \pm \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)} \right); \quad (1.171)$$

$$\operatorname{arctg} z_1 \pm \operatorname{arctg} z_2 = \operatorname{arctg} \frac{z_1 \pm z_2}{1 - z_1 z_2}. \quad (1.172)$$

Аналогичные формулы приведем для обратных гиперболических функций:

$$\operatorname{Arsh} (\pm z) = \pm \operatorname{Arch} \sqrt{z^2 + 1} = \operatorname{Arth} \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}; \quad (1.173)$$

$$\operatorname{Arch} z = \pm \operatorname{Ars} \sqrt{z^2 - 1} = \pm \operatorname{Art} \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z}; \quad (1.174)$$

$$\operatorname{Arth} (\pm z) = \operatorname{Arsh} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \pm \operatorname{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}; \quad (1.175)$$

$$\operatorname{Arcth} (\pm z) = \operatorname{Arsh} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} = \pm \operatorname{Arch} \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}; \quad (1.176)$$

$$\operatorname{Arsh} z_1 \pm \operatorname{Arsh} z_2 = \operatorname{Arsh} \left( z_1 \sqrt{1+z_2^2} \pm z_2 \sqrt{1+z_1^2} \right); \quad (1.177)$$

$$\operatorname{Arch} z_1 \pm \operatorname{Arch} z_2 = \operatorname{Arch} \left[ z_1 z_2 \pm \sqrt{(z_1^2 - 1)(z_2^2 - 1)} \right]; \quad (1.178)$$

$$\operatorname{Arth} z_1 \pm \operatorname{Arth} z_2 = \operatorname{Arth} \frac{z_1 \pm z_2}{1 \pm z_1 z_2}. \quad (1.179)$$

Между обратными тригонометрическими и обратными гиперболическими функциями существуют зависимости, которые непосредственно устанавливаются из перечисленных выше формул. Запишем их только для главных значений этих функций:

$$\operatorname{arcsin} z = -i \operatorname{Arsh} iz; \quad (1.180)$$

$$\operatorname{arccos} z = \pm i \operatorname{Arch} z; \quad (1.181)$$

$$\operatorname{arctg} z = -i \operatorname{Arth} iz; \quad (1.182)$$

$$\operatorname{arcctg} z = i \operatorname{Arcth} iz; \quad (1.183)$$

$$\operatorname{Arsh} z = -i \operatorname{arcsin} iz; \quad (1.184)$$

$$\operatorname{Arch} z = \pm i \operatorname{arccos} z; \quad (1.185)$$

$$\operatorname{Arth} z = -i \operatorname{arctg} iz; \quad (1.186)$$

$$\operatorname{Arctg} z = i \operatorname{arcctg} iz. \quad (1.187)$$

Более подробно некоторые важные геометрические свойства элементарных функций будут отмечены в гл. 2.

### § 3. Аналитические и гармонические функции

**7. Дифференцируемость и аналитичность.** Производная и дифференциал функции комплексного переменного  $w = f(z)$  определяются точно так же, как и для функций действительного переменного. Пусть функция  $w = f(z)$  определена в области  $g$  и точка  $z_0$  принадлежит этой области.

Составим разностное отношение

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Очевидно, это отношение представляет собой функцию от  $z$ , определенную для всех  $z \neq z_0$ .

Если существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \quad (1.188)$$

то он называется *производной функции*  $f(z)$  в точке  $z_0$  и обозначается одним из следующих символов:

$$w'; \quad f'(z_0); \quad \left. \frac{df(z_0)}{dz} \right|_{z=z_0}; \quad \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0}.$$

Функция  $w = f(z)$ , имеющая производную в точке  $z_0$ , называется *дифференцируемой* или *моногенной в этой точке*.

Если функция  $w = f(z)$  является моногенной в каждой точке области  $g$ , то она называется *дифференцируемой в этой области*, а также *голоморфной* или *аналитической* (часто *регулярной* или *правильной*).

По определению, однозначная функция называется *аналитической* в некоторой области, если в каждой ее точке она имеет определенную конечную производную.

Таким образом, функция может быть аналитической только в некоторой области. Однако и о каждой отдельной точке такой области говорят, что в ней данная функция — аналитическая, т. е. функция аналитическая в точке должна быть аналитической и в некоторой окрестности этой точки.

*Аналитичность* в области  $g$  предполагает *однозначность* и *дифференцируемость* функции, ибо дифференцируемая функция обязательно непрерывна. Поэтому в случае *многозначной* функции всегда возникает вопрос о возможности выделения *однозначной* и *непрерывной ветви функции*.

*Однозначная в области ветвь функции* называется *аналитической* в ней, если в каждой точке области она имеет производную.

Из определения производной и свойств пределов функций комплексного переменного вытекает, что основные правила и формулы нахождения производных остаются теми же, что и для функций действительного переменного. В частности, следует, что целая рациональная функция есть аналитическая во всей открытой плоскости комплексного переменного  $z$ ; дробно-рациональная функция — аналитическая во всей открытой плоскости  $z$ , кроме точек, в которых ее знаменатель обращается в нуль.

Таблица производных основных элементарных функций действительного переменного полностью переносится на функции комплексного переменного:

$$1) (C)' = 0;$$

$$4) (a^z)' = a^z \ln a;$$

$$2) (z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1};$$

$$5) (\ln z)' = \frac{1}{z};$$

$$3) (e^z)' = e^z;$$

$$6) (\log_a z)' = \frac{1}{z \ln a};$$

$$7) (\sin z)' = \cos z;$$

$$16) (\operatorname{arcctg} z)' = -\frac{1}{1+z^2};$$

$$8) (\cos z)' = -\sin z;$$

$$17) (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z;$$

$$9) (\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z};$$

$$18) (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z;$$

$$10) (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z};$$

$$19) (\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z};$$

$$11) (\sec z)' = \sec z \operatorname{tg} z;$$

$$20) (\operatorname{cth} z)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z};$$

$$12) (\operatorname{cosec} z)' = -\operatorname{cosec} z \operatorname{ctg} z;$$

$$21) (\operatorname{Arsh} z)' = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}};$$

$$13) (\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}};$$

$$22) (\operatorname{Arch} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}};$$

$$14) (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}};$$

$$23) (\operatorname{Arth} z)' = \frac{1}{1-z^2};$$

$$15) (\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2};$$

$$24) (\operatorname{Arctg} z)' = \frac{1}{z^2-1}.$$

Если функция комплексного переменного задана в виде (1.108), то условием ее дифференцируемости в точке  $z_0$  является существование

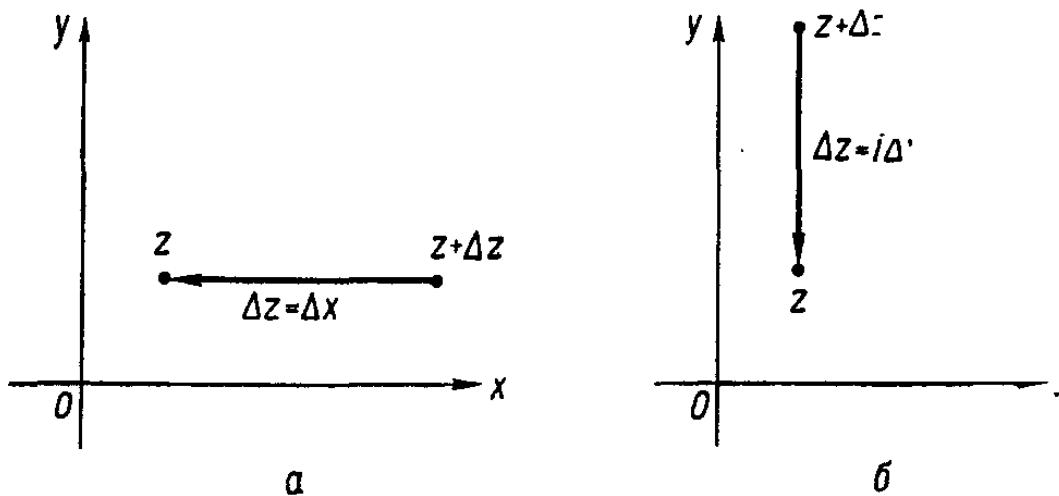


Рис. 21.

предела (1.188). Найдем условие дифференцируемости функции комплексного переменного, заданной в виде (1.110). В этом случае условие дифференцируемости сводится к существованию следующего предела:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (1.189)$$

Выясним, какими должны быть действительная и мнимая части функции  $\omega = u(x, y) + iv(x, y)$ . Очевидно, чтобы существовал предел (1.189),  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  не могут быть произвольными, а должны удо-

летворять определенным условиям. Эти условия легко получить, если предположить, что предел (1.189) существует и не зависит от способа стремления к нулю приращения  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ .

В частности, при приближении точки  $z + \Delta z$  к точке  $z$  по прямой, параллельной оси  $Ox$  (рис. 21, а), имеем

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.190)$$

Если же точка  $z + \Delta z$  приближается к  $z$  по прямой, параллельной оси  $Oy$  (рис. 21, б), то получим

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( -i \frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.191)$$

Из равенства левых частей (1.190) и (1.191) следует равенство правых частей, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.192)$$

Условия (1.192), которым должны удовлетворять действительная и мнимая части каждой функции комплексного переменного  $w = f(z)$ , имеющей производную  $w' = f'(z)$ , называются *условиями Коши — Римана* (или *Даламбера — Эйлера*).

При некоторых добавочных ограничениях, как например, существование полных дифференциалов функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , условия Коши — Римана являются не только необходимыми, но и достаточными для дифференцируемости функции  $f(z)$ .

Непосредственное вычисление производной от функции, заданной в виде (1.108), производится по одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.193)$$

Точки, в которых однозначная функция  $y = f(z)$  имеет производную, называются *правильными точками* этой функции, а точки, в которых функция  $f(z)$  не имеет производной (или не определена), называются *особыми точками*.

К особым точкам, например, относятся *полюс* функции (точка  $z = a$ , в которой  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ ) и *точка разветвления* (точка, при обходе которой первоначально выбранное значение многозначной функции переходит в новое). На классификации особых точек мы остановимся в п. 14.

Условия существования производной (1.192) получены, когда отделение действительной и мнимой частей функции произведено в декартовых прямоугольных координатах.

Однако часто такое отделение, как уже отмечалось, удобно произвести в полярных координатах, т. е. посредством подстановки в (1.108)  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ .

Тогда, очевидно, после отделения действительной части от мнимой получим

$$\omega = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi). \quad (1.194)$$

Чтобы найти условия существования производной в этом случае, нужно в равенствах (1.192) сделать замену переменных и перейти от декартовых координат к полярным.

После замены

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi$$

имеем

$$\omega = u(x, y) + iv(x, y) = u^*(r, \varphi) + iv^*(r, \varphi),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi; \\ \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \varphi = \\ &= r \left( \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi \right). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \varphi}.$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial v^*}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}.$$

Таким образом, если функция комплексного переменного  $\omega = f(z)$  задана в полярных координатах

$$\omega = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi),$$

то условия Коши — Римана имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad (1.195)$$

а ее производная вычисляется по формуле

$$\omega' = \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right). \quad (1.196)$$

**8. Связь аналитических функций с гармоническими.** Однозначная действительная функция двух действительных переменных  $T(x, y)$  называется *гармонической* в области  $D$ , если в этой области она обладает непрерывными частными производными первых двух порядков и удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (1.197)$$

которое называется уравнением Лапласа ( $\Delta$  — дифференциальный оператор Лапласа).

Пусть  $w = u + iv$  — аналитическая функция в некоторой области  $D$ . Покажем, что действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. В самом деле, допустим, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  обладают непрерывными частными производными второго порядка\*. Тогда, дифференцируя (1.192) по  $x$  и по  $y$ , получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \quad (1.198)$$

Складывая (1.198) почленно, имеем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.199)$$

Аналогично получим

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (1.200)$$

Если  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  — произвольные гармонические функции, то функция  $u(x, y) + iv(x, y)$ , вообще говоря, не будет аналитической.

Поэтому, чтобы образовать аналитическую функцию  $w = u(x, y) + iv(x, y)$  из гармонических  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , нужно потребовать для последних выполнения условий Коши — Римана (1.192).

Две гармонические функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , удовлетворяющие условиям Коши — Римана и, следовательно, являющиеся действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции  $w = u + iv$ , называются *сопряженными*.

В различных приложениях теории функций комплексного переменного к задачам математической физики часто приходится сталкиваться со следующим вопросом: если задана функция двух действительных переменных  $u = u(x, y)$ , можно ли найти аналитическую функцию  $w = u(x, y) + iv(x, y)$ , действительная часть которой совпадает с заданной функцией  $u(x, y)$ .

В предыдущем пункте мы показали, что это возможно только в том случае, если  $u(x, y)$  гармоническая функция.

Пусть  $u(x, y)$  — гармоническая функция. Тогда, чтобы построить аналитическую функцию  $w = u(x, y) + iv(x, y)$ , достаточно по функции  $u(x, y)$  найти сопряженную с ней функцию  $v(x, y)$ , что легко сделать, воспользовавшись условиями Коши — Римана.

Покажем это на примере. Пусть задана гармоническая функция  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ . Тогда легко найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}. \quad (1.201)$$

Воспользовавшись условиями (1.192), получим

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 + y^2}. \quad (1.202)$$

\* Существование и непрерывность частных производных второго порядка функций  $u$  и  $v$  следуют из того, что аналитическая функция бесконечное число раз дифференцируемая (см. п. 11).

Первое из уравнений (1.202) проинтегрируем по  $y$  (постоянная интегрирования в этом случае может быть произвольной функцией от  $x$ ):

$$v(x, y) = \int \frac{2x}{x^2 + y^2} dy + C(x) = 2\arctg \frac{y}{x} + C(x).$$

Дифференцируя последнее равенство по  $x$  и сравнивая его со вторым, из уравнений (1.202) найдем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 + y^2} + C'(x) = -\frac{2y}{x^2 + y^2},$$

откуда заключаем, что  $C'(x) = 0$  и  $C(x) = \text{const} = C$ .

Поэтому

$$v(x, y) = 2\arctg \frac{y}{x} + C.$$

Таким образом, искомая аналитическая функция в рассматриваемом случае запишется так:

$$w = \ln(x^2 + y^2) + i \left( 2\arctg \frac{y}{x} + C \right).$$

## § 4. Интеграл от функции комплексного переменного

**9. Понятие интеграла и его свойства.** При изучении аналитических функций и соответствующих им конформных отображений существенную роль играет понятие интеграла от функции комплексного переменного.

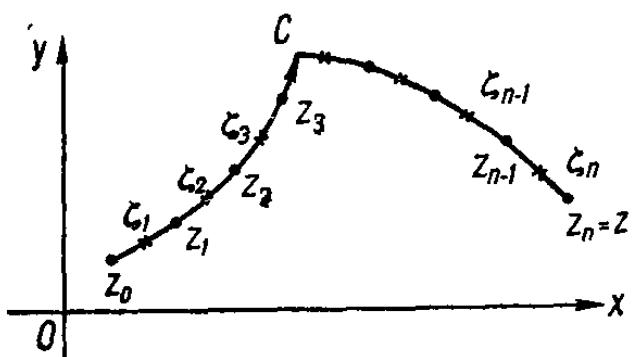


Рис. 22.

функция  $f(z)$ , непрерывная во всех точках кривой  $C$ .

Разбив кривую  $C$  точками  $z_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) на  $n$  частей (элементарных дуг), выберем внутри или на одном из концов элементарной дуги по одной точке  $\zeta_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Составим сумму

$$S_n = f(\zeta_1) \Delta z_1 + f(\zeta_2) \Delta z_2 + \dots + f(\zeta_n) \Delta z_n$$

или короче

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad (1.203)$$

где  $\Delta z = z_k - z_{k-1}$  — приращение комплексного переменного  $z$ .

Сумма вида (1.203) называется *интегральной суммой*  $f(\zeta_k)$ , вычисленной для данного разбиения кривой  $C$  и данного выбора точек  $\zeta_k$ .

Предел интегральной суммы (1.203), вычисленный для произвольно выбранного разбиения кривой  $C$  при условии, что  $\max |\Delta z_k| \rightarrow 0$ , называется интегралом от функции  $f(z)$  вдоль кривой  $C$  и обозначается символом

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k; \quad (1.204)$$

$$(\max |\Delta z_k| \rightarrow 0).$$

Из определения интеграла следуют его свойства:

$$1) \int_C [f_1(z) \pm f_2(z)] dz = \int_C f_1(z) dz \pm \int_C f_2(z) dz;$$

$$2) \int_C af(z) dz = a \int_C f(z) dz,$$

где  $a$  — комплексная постоянная величина;

3) если выбранное на кривой  $C$  направление изменить на противоположное, то

$$\int_{\bar{C}} f(z) dz = - \int_C f(z) dz,$$

где  $\bar{C}$  — кривая, геометрически совпадающая с кривой  $C$ , но имеющая направление, противоположное направлению кривой  $C$ ;

4) если кривую  $C$  разбить на отдельные дуги  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , то

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz;$$

$$5) \int_C dz = z - z_0,$$

так как сумма (1.204) при  $f(z) \equiv 1$  принимает вид

$$\Delta z_1 + \Delta z_2 + \dots + \Delta z_n = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \dots + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0 = z - z_0;$$

6) если  $|f(z)| \leq M$  во всех точках кривой  $C$  и длина кривой  $C$  равна  $l$ , то

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq Ml.$$

Действительно,

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq Ml,$$

так как сумма  $\sum_{k=1}^n |\Delta z_k|$  равна длине ломаной, вписанной в кривую  $C$ .

**Теорема.** Интеграл от функции  $f(z)$  по кривой  $C$  существует, если кривая  $C$  кусочно-гладкая, а функция  $f(z)$  непрерывна на этой кривой.

Для доказательства разделим действительную и мнимую части в правой части равенства (1.204), сделав предварительно замену  $z_k = x_k + iy_k$  и  $\xi_k = \xi_k + i\eta_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ). После чего

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)] (\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k] + \\ &\quad + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k]. \end{aligned} \quad (1.205)$$

В курсе математического анализа доказывается, что сумма вида  $\sum_{k=1}^n u(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k$  в случае, когда кривая кусочно-гладкая, а функция  $u(x, y)$  непрерывна на ней, стремится к пределу, не зависящему от выбора на кривой  $C$  точек  $(x_k, y_k)$  и  $(\xi_k, \eta_k)$  лишь бы  $\max \Delta x_k \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Этот предел называется *криволинейным интегралом*. Отсюда и следует существование пределов всех сумм, стоящих в правой части равенства (1.205), что и требовалось доказать.

Следовательно, равенство (1.205) можно переписать в виде

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (1.206)$$

Это равенство легко получить формально, если в левой его части сделать замену:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y); \quad dz = dx + idy.$$

Формула (1.206) позволяет свести вычисление интеграла от функции комплексного переменного к вычислению обычных криволинейных интегралов.

Пусть кривая  $C$  задана *параметрическим уравнением*

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad (1.207)$$

причем

$$z(t_0) = z_0; \quad z(T) = z_n = z. \quad (1.208)$$

Тогда, пользуясь (1.206) и полагая

$$f(z) = f\{x(t) + iy(t)\}; \quad dz = \{x'(t) + iy'(t)\} dt = z'(t) dt,$$

получим

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_0}^T f\{z(t)\} z'(t) dt. \quad (1.209)$$

Таким образом, мы свели вычисление интеграла от функции комплексного переменного  $f(z)$  вдоль кривой  $C$  к вычислению *определенного интеграла*.

Например, вычислим  $\int_C \frac{dz}{z}$ , где  $C$  — окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат. Параметрическое уравнение окружности  $z = Re^{it}$ , где параметр  $t$  изменяется от 0 до  $2\pi$ . Поэтому  $dz = Re^{it}idt$

и легко находим значение интеграла

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} -\frac{\operatorname{Re}^{it} dt}{\operatorname{Re}^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \quad (1.210)$$

Легко убедиться, что для произвольных комплексных функций значение интеграла зависит не только от вида подынтегральной функции, но и от геометрического вида кривой  $C$ , т. е. от выбранного пути интегрирования. Например, пусть  $f(z) = \operatorname{Re} z$ , а  $C_1$  и  $C_2$  два пути интегрирования (рис. 23), соединяющие начало координат с точкой  $\alpha + i\beta$ , причем  $C_1$  — путь интегрирования, образованный ломаной  $OAC$ , а  $C_2$  — путь интегрирования, образованный ломаной  $OB'C$ .

Тогда

$$\int_{C_1} x dx = \int_0^\alpha x dx + \int_0^\beta i x dy = \frac{\alpha^2}{2} + i\alpha\beta; \quad (1.211)$$

$$\int_{C_2} x dx = \int_0^\alpha x dx = \frac{\alpha^2}{2}. \quad (1.212)$$

Таким образом, значения интегралов (1.211) и (1.212) различны.

**10. Теорема Коши.** Сформулируем следующую замечательную теорему теории функций комплексного переменного, связанную с интегральным представлением аналитических функций.

**Теорема.** Пусть  $f(z)$  — аналитическая функция в односвязной области  $D$ , содержащей некоторый замкнутый контур  $C$  без кратных точек, тогда

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (1.213)$$

Для доказательства воспользуемся известной *формулой Грина*

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

где  $D$  — область, ограниченная контуром  $C$  (рис. 24).

Применяя эту формулу к обоим интегралам, стоящим в правой части равенства (1.206), получим

$$\int_C f(z) dz = \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

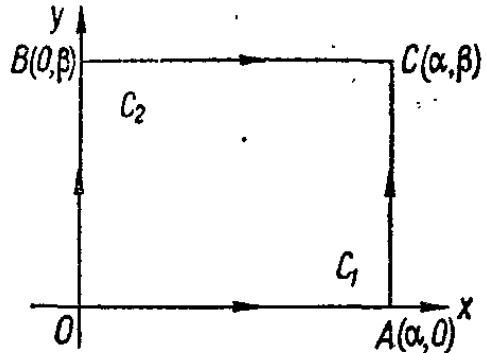


Рис. 23.

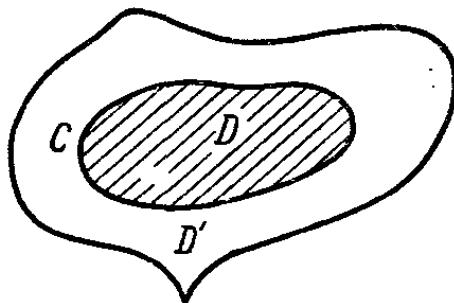


Рис. 24.

тый контур  $C$  без кратных точек, тогда

$$\int_C f(z) dz = 0. \quad (1.213)$$

Для доказательства воспользуемся известной *формулой Грина*

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

где  $D$  — область, ограниченная контуром  $C$  (рис. 24).

Применяя эту формулу к обоим интегралам, стоящим в правой части равенства (1.206), получим

$$\int_C f(z) dz = \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

Так как  $f(z)$  — аналитическая функция, то выполняются условия Коши — Римана (1.192). Следовательно, подынтегральные выражения в двойных интегралах равны нулю, и поэтому справедливо равенство (1.213).

Если же замкнутый контур  $C$  разбить точками  $a$  и  $b$  на две кривые  $C_1$  и  $C_2$  (рис. 25), то легко показать, что из сформулированной теоремы следует эквивалентное утверждение.

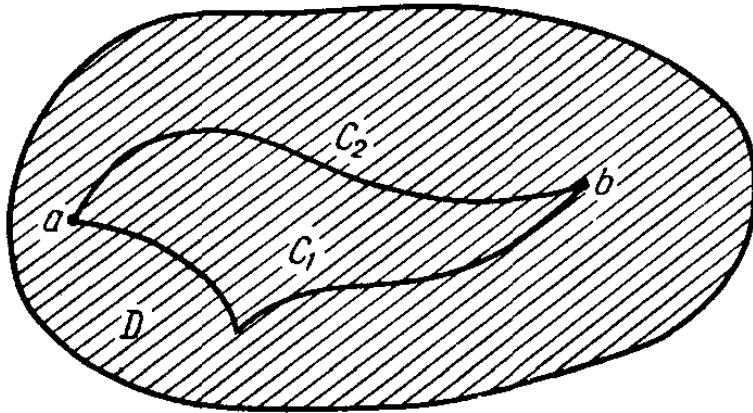


Рис. 25.

Если  $f(z)$  — аналитическая функция в каждой точке односвязной области  $D$ , то интегралы повсем путям, соединяющим две произвольные точки области, совпадают.

Таким образом, если  $C_1$  и  $C_2$  две произвольные кривые, соединяющие две произвольные точки  $a$  и  $b$ , расположенные в области  $D$  (см. рис. 25), то справедливо равенство

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz, \quad (1.214)$$

т. е. величина интеграла  $\int_C f(z) dz$  не зависит от пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки  $a$  и конечной точки  $b$  кривой  $C$ .

В этом случае рассмотренный интеграл формально ничем не отличается от известного из анализа понятия определенного интеграла как приращения первообразной

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz \quad (1.215)$$

в промежутке интегрирования  $[a, b]$ , где под промежутком следует понимать произвольную кривую  $C$ , соединяющую точки  $a$  и  $b$ . Поэтому иногда обозначают

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz.$$

Функция (1.215) образована в результате интегрирования вдоль любой кривой  $C$ , соединяющей фиксированную точку  $z_0$  и произвольную точку  $z$  области  $D$ .

Можно доказать, что функция  $\Phi(z)$  является аналитической и ее производная равна подынтегральной функции  $f(z)$ .

Тем самым вводится понятие *неопределенного интеграла от аналитической функции*. Приведем ряд неопределенных интегралов от некоторых часто встречающихся элементарных функций комплексного переменного:

$$1) \int z^\alpha dz = \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;$$

$$2) \int \frac{dz}{z} = \ln z + C;$$

$$3) \int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a} + C;$$

$$4) \int e^z dz = e^z + C;$$

$$5) \int \sin az dz = -\frac{\cos az}{a} + C;$$

$$6) \int \cos az dz = \frac{\sin az}{a} + C;$$

$$7) \int \operatorname{tg} z dz = -\ln \cos z + C;$$

$$8) \int \operatorname{ctg} z dz = \ln \sin z + C;$$

$$9) \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \operatorname{tg} z + C;$$

$$10) \int \frac{dz}{\sin^2 z} = -\operatorname{ctg} z + C;$$

$$11) \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \arcsin \frac{z}{a} + C;$$

$$12) \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \operatorname{Arsh} \frac{z}{a} + C = \ln(z + \sqrt{z^2 + a^2}) + C;$$

$$13) \int \operatorname{sh} z dz = \operatorname{ch} z + C;$$

$$14) \int \operatorname{ch} z dz = \operatorname{sh} z + C;$$

$$15) \int \operatorname{th} z dz = \ln \operatorname{ch} z + C;$$

$$16) \int \operatorname{cth} z dz = \ln \operatorname{sh} z + C;$$

$$17) \int \frac{dz}{\operatorname{ch}^2 z} = \operatorname{th} z + C;$$

$$18) \int \frac{dz}{\operatorname{sh}^2 z} = -\operatorname{cth} z + C;$$

$$19) \int \frac{dz}{a^2 + z^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C;$$

$$20) \int \frac{dz}{a^2 - z^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{z}{a} + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+z}{a-z} + C;$$

$$21) \int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{-1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{z}{a} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{z-a}{z+a} + C;$$

$$22) \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \operatorname{Arch} z + C = \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}) + C;$$

$$23) \int \frac{dz}{\sin z} = \ln \operatorname{tg} \frac{z}{2} + C;$$

$$24) \int \frac{dz}{\cos z} = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin z}{1 - \sin z} + C.$$

Пусть  $F(z)$  — какая-либо из первообразных функций, для которой

$$F'(z) = f(z),$$

где  $f(z)$  — аналитическая функция. Так как производная от интеграла (1.215) также равна  $f(z)$ , то, очевидно,

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) + C, \quad (1.216)$$

где  $C$  — постоянная.

Положив в равенстве (1.216)  $z = z_0$ , получим

$$0 = F(z_0) + C; \quad C = -F(z_0).$$

Поэтому

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z) - F(z_0).$$

В частности,

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a). \quad (1.217)$$

Формула (1.217) совпадает с известной *формулой Ньютона — Лейбница* и служит для вычисления определенных интегралов от функций, являющихся аналитическими в области  $D$ , которая целиком содержит кривую, соединяющую точки  $a$  и  $b$  (см. рис. 25).

Для иллюстрации вычислим определенный интеграл  $\int_{z_0}^z zdz$ . Пользуясь формулой (1.206), получим

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z zdz &= \int_C xdx - ydy + i \int_C ydx + xdy = \left( \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + ixy \right) \Big|_{x_0, y_0}^{x, y} = \\ &= \frac{(x+iy)^2 - (x_0+iy_0)^2}{2} = \frac{1}{2} (z^2 - z_0^2). \end{aligned}$$

По формуле Ньютона — Лейбница (1.217) непосредственно находим

$$\int_{z_0}^z zdz = \frac{z^2}{2} \Big|_{z_0}^z = \frac{1}{2} (z^2 - z_0^2).$$

Рассмотрим теперь *многосвязную* область  $D$ , ограниченную внешним контуром  $C_0$  и внутренними контурами  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (рис. 26), и предположим, что функция  $f(z)$  является аналитической как в этой  $(n+1)$ -связной области  $D$ , так и на контуре  $C_0$ , проходящем в положительном направлении, и  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , проходящих в отрицательном направлении (в обоих случаях против часовой стрелки). Тогда справедливо равенство

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad (1.218)$$

Формула (1.218) и составляет содержание теоремы Коши для многосвязных областей.

Действительно, после проведения разрезов  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , как показано на рис. 26, многосвязная область становится односвязной областью, ограниченной кривой  $\Gamma$ , состоящей из контура  $C_0$ , обход которого совершается против часовой стрелки, контуров  $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n$ , которые обходятся по часовой стрелке, и разрезов  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , проходящих дважды в противоположных направлениях. Следовательно, по теореме Коши для односвязных областей

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz + \int_{\bar{C}_1} f(z) dz + \int_{\bar{C}_2} f(z) dz + \dots + \int_{\bar{C}_n} f(z) dz = 0$$

(интегралы вдоль разрезов  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , проходящих в противоположных направлениях, уничтожаются). Если же обход контуров  $C_1, C_2, \dots, C_n$  совершить против часовой стрелки, то

$$\int_{C_0} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz - \dots - \int_{C_n} f(z) dz = 0,$$

откуда и следует равенство (1.218).

**Следствие.** Интегралы по двум непересекающимся контурам  $C$  и  $C_0$  равны, если подынтегральная функция  $f(z)$  — аналитическая в двух связной области, ограниченной этими контурами:

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_0} f(z) dz. \quad (1.219)$$

Отсюда вытекает, что интеграл по контуру  $C$  не изменяется, если контур подвергать *непрерывной деформации*, не выводящей его за область аналитичности подынтегральной функции.

**11. Интегральная формула Коши.** Теорема Коши позволяет вывести следующую, так называемую *интегральную формулу Коши*, играющую весьма важную роль во всей теории функций комплексного переменного и ее приложениях:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.220)$$

Эта формула выражает значение аналитической функции во внутренних точках замкнутого контура  $C$  через значение этой функции на самом контуре.

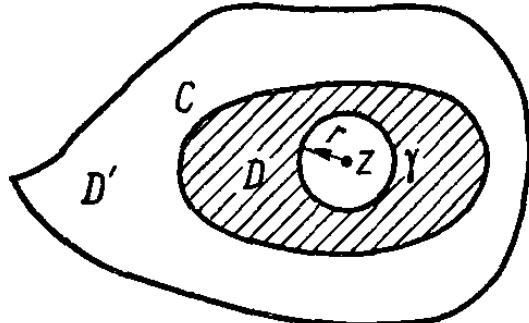


Рис. 27.

Докажем эту формулу. Пусть  $C$  — замкнутый контур без точек самопересечения, целиком лежащий в односвязной области аналитичности  $D'$  функции  $f(z)$ , а  $z$  — любая точка, лежащая внутри области  $D$ , ограниченной контуром  $C$  (рис. 27).

Подынтегральная функция в выражении (1.220) аналитична в области  $D$ , за исключением точки  $\zeta = z$ . Опишем из точки  $z$ , как из

центра, окружность  $\gamma$  радиуса  $r$ , так чтобы она целиком лежала в области  $D$ . Тогда в кольце, ограниченном контурами  $C$  и  $\gamma$ , подынтегральная функция интеграла (1.220) является аналитической и, следовательно, в силу (1.219) имеем

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\gamma} \frac{f(z) - [f(z) - f(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta$$

или

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.221)$$

Учитывая, что  $z$  — фиксированная точка и что уравнение контура  $\gamma$  имеет вид  $\zeta = z + re^{i\Phi}$ , найдем  $d\zeta = ire^{i\Phi}d\Phi$ . Поэтому первый интеграл правой части равенства (1.221)

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = if(z) \int_0^{2\pi} d\Phi = 2\pi i f(z).$$

Для второго интеграла, стоящего в правой части равенства (1.221), в силу свойства 6), п. 9 получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq 2\pi r \max \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} \right| = \\ &= 2\pi r \max \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{r} \right| = 2\pi \max |f(z) - f(\zeta)|. \end{aligned}$$

В силу непрерывности  $f(z)$  разность  $|f(z) - f(\zeta)| \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ . Учитывая, кроме того, что рассматриваемые интегралы не зависят от величины радиуса  $r$ , последнюю можно сделать сколь угодно малой и

поэтому из соотношения (1.221) получим

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz = 2\pi i f(z),$$

откуда и следует равенство (1.220).

Величину, стоящую в правой части равенства (1.220), часто называют *интегралом Коши*. Если точка  $z$  лежит вне области  $D$ , то интеграл Коши равен нулю, ибо в этом случае подынтегральная функция  $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  является аналитической в каждой точке области  $D$ .

Используя формулу Коши (1.220), легко показать, что разностное отношение

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int_C \left[ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right] d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z + \Delta z)} d\zeta \end{aligned}$$

переходит при  $\Delta z \rightarrow 0$  в производную функции  $f(z)$  в точке  $z$ , равную

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \quad (1.222)$$

Используя выражение (1.222), можно получить *общую интегральную формулу Коши*, дающую выражение для  $n$ -й производной функции  $f(z)$ ,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (1.223)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Полезно запомнить, что формально формулы (1.222) и (1.223) можно получить из формулы Коши (1.220), если обе части последней проифференцировать необходимое число раз по  $z$ .

Из общей интегральной формулы Коши следует одно из основных свойств аналитических функций, состоящее в следующем: из существования первой производной данной функции в какой-либо окрестности точки следует существование в окрестности той же точки производных этой функции любого порядка, а следовательно, и аналитичность как самой функции, так и всех ее производных.

Рассмотрим случай, когда в (1.223)  $z$  — центр окружности  $C$  радиуса  $\rho$ , которая содержится в области  $D'$  вместе со всеми внутренними точками, и пусть, кроме того,  $M(\rho)$  — максимум модуля функции на окружности  $C$ . Тогда для модуля функции и ее производной порядка  $n$  в любой внутренней точке  $z$  окружности  $C$  получаем оценку

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M(\rho)}{2\pi \rho^{n+1}} 2\pi \rho$$

или окончательно

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M(\rho)}{\rho^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.224)$$

Неравенства (1.224) называются *неравенствами Коши*.

Наконец отметим, что интегральные формулы Коши (1.220) и (1.223) могут быть использованы для вычисления *интегралов по замкнутым контурам*.

Например, вычислим интеграл

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)},$$

где  $C$  — окружность радиуса  $R = 2$  с центром в точке  $z = 3i$ . Функция  $f(z) = \frac{e^z}{z}$  внутри  $C$  аналитична, следовательно, применяя формулу (1.220), имеем

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)} = \int_C \frac{f(z)}{z-2i} dz = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i}$$

или окончательно

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)} = \pi (\cos 2 + i \sin 2).$$

Пусть  $C$  — замкнутый контур, обходящий точку  $i$  один раз. Тогда, применяя формулу (1.223) к функции  $f(z) = \cos z$ , легко вычислить интеграл

$$\int_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2(\cos z)}{dz^2} \right|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \cosh 1.$$

## § 5. Ряды и изолированные особые точки однозначных аналитических функций

**12. Числовые и функциональные ряды.** Все основные понятия и положения теории рядов с действительными членами легко обобщаются на ряды с комплексными членами:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n. \quad (1.225)$$

Ряд (1.225) называется *числовым* или *функциональным*, если его члены  $z_1, z_2, \dots, z_n$  являются соответственно числами или функциями. Частичной суммой ряда (1.225) называется сумма

$$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n,$$

а предел частичной суммы

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (1.226)$$

называется *суммой ряда* (1.225).

Если существует конечный предел (1.226), то ряд называется *сходящимся*, в противном случае ряд называется *расходящимся*.

Положив в (1.225)  $z_n = x_n + iy_n$ , получим, что ряд (1.225) сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad (1.227)$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \quad (1.228)$$

членами которых являются соответственно действительные и мнимые части членов ряда (1.225).

В частности, получаем, что необходимым условием сходимости ряда (1.225) является стремление его общего члена  $z_n$  к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. из условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \quad (1.229)$$

следует условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0. \quad (1.230)$$

Если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|, \quad (1.231)$$

составленный из модулей членов ряда (1.225), то ряд (1.225) также сходится и называется *абсолютно сходящимся*.

Действительно, если сходится (1.231), то из очевидных неравенств

$$|x_n| \leq |z_n|; \quad |y_n| \leq |z_n|$$

вытекает сходимость рядов (1.227) и (1.228), а следовательно, и ряда (1.225).

Сходящиеся ряды можно умножать на постоянное число, отличное от нуля, почленно складывать и вычитать, при этом суммы рядов будут соответственно умножаться на постоянное число, равняться сумме и разности исходных рядов.

Над абсолютно сходящимися рядами можно производить все основные арифметические операции, которые сходны с операциями, производимыми над конечными суммами, т. е. члены абсолютно сходящихся рядов можно менять местами, почленно складывать и вычитать, перемножать и делить, как обычные многочлены (полиномы).

Например, произведение двух рядов определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots) (\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n + \cdots) &= \\ = z_1 \zeta_1 + (z_2 \zeta_1 + z_1 \zeta_2) + (z_3 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + z_1 \zeta_3) + \cdots + \\ + (z_n \zeta_1 + z_{n-1} \zeta_2 + \cdots + z_1 \zeta_n) + \cdots. \end{aligned} \quad (1.232)$$

Если ряд (1.225) сходится, а ряд (1.231) расходится, то ряд (1.225) называется *условно сходящимся*.

Для исследования абсолютно сходящихся рядов можно применить известные признаки сходимости знакоположительных рядов.

# 1. Признак сравнения. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n + \dots \quad (1.233)$$

абсолютно сходится и если, кроме того, начиная с некоторого  $n > N$ , выполняется неравенство

$$|z_n| \leq |\zeta_n|, \quad (1.234)$$

то ряд (1.225) также абсолютно сходится.

2. Признак Даламбера. Если, начиная с некоторого значения  $n > N$ , выполняется неравенство

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq q < 1, \quad (1.235)$$

где  $q$  — положительное постоянное число, не зависящее от  $N$ , то ряд (1.225) абсолютно сходится.

3. Признак Коши. Если, начиная с некоторого  $n > N$ , выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{|z_n|} \leq q < 1, \quad (1.236)$$

то ряд (1.225) абсолютно сходится.

Рассмотрим функциональный ряд

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad (1.237)$$

членами которого являются функции комплексного переменного. В одних точках комплексной плоскости  $z$  этот ряд может сходиться, в других — расходиться. Множество точек, в которых ряд (1.237) сходится, называется областью сходимости этого ряда.

Суммой ряда (1.237) называется предел

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z), \quad (1.238)$$

где

$$S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z).$$

Сумма такого ряда является функцией аргумента  $z$ , определенной в точках, в которых ряд (1.237) сходится.

Остатком ряда (1.237) называется разность

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots \quad (1.239)$$

В каждой точке сходимости ряда (1.237) должно выполняться условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0,$$

или, другими словами, если ряд в точке  $z$  сходится, то для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать столь большое число  $N$ , что при  $n > N$  выполняется неравенство

$$|R_n(z)| < \varepsilon. \quad (1.240)$$

Наименьшее число  $N$ , вообще говоря, зависит не только от  $\varepsilon$ , но и от  $z$  и, следовательно, не является одинаковым для всех точек области  $D$  сходимости ряда.

В случае, когда значения  $N(\varepsilon, z)$  для всех точек некоторой области  $D$  не превышают некоторого числа  $N(\varepsilon^*)$ , то, очевидно, число  $N^*$  не зависит от точек  $z$  данной области.

Следовательно, если существует такое число  $N(\varepsilon)$ , не зависящее от выбора точки  $z$ , что при всех  $n > N$  во всех точках области  $D$  выполняется неравенство (1.240), то в этом случае ряд (1.237) называется *равномерно сходящимся* в области  $D$ .

Равномерную сходимость функциональных рядов часто можно установить по следующему признаку:

если в любой точке  $z$  области  $D$  модуль каждого члена ряда (1.237) не превышает соответствующего члена сходящегося числового ряда

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1.241)$$

то ряд (1.237) сходится в области  $D$  равномерно.

Сходство равномерно сходящихся рядов с конечными суммами еще больше, чем абсолютно сходящихся рядов. Для равномерно сходящихся рядов справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если члены ряда (1.237) являются непрерывными функциями в некоторой области  $D$  (или на кривой  $C$ ) и если этот ряд сходится равномерно в  $D$  (или на  $C$ ), то сумма  $f(z)$  также непрерывна в области  $D$  (или на кривой  $C$ ).

**Теорема 2.** Если члены ряда (1.237) являются непрерывными функциями на некоторой кривой  $C$  и ряд сходится на  $C$  равномерно, то его можно почленно интегрировать, т. е.

$$\int_C f(z) dz = \int_C f_0(z) dz + \int_C f_1(z) dz + \cdots + \int_C f_n(z) dz + \cdots \quad (1.242)$$

**Теорема 3.** Если члены ряда (1.237) являются функциями, имеющими в  $D$  (или на кривой  $C$ ) непрерывные производные, и если, кроме того, ряд, составленный из производных  $f_n(z)$ , сходится равномерно, то в области  $D$  (или на  $C$ ) возможно почленное дифференцирование, т. е.

$$f'(z) = f'_0(z) + f'_1(z) + \cdots + f'_n(z) + \cdots \quad (1.243)$$

**Теорема 4.** Если члены ряда (1.237) являются аналитическими в некоторой области  $D$  функциями и ряд сходится равномерно в  $D$ , то сумма ряда  $f(z)$  также является функцией, аналитической в области  $D$ .

Последняя теорема называется *теоремой Вейерштрасса*. Из этой теоремы, в частности, следует, что ряд (1.237), составленный из аналитических функций, можно почленно дифференцировать сколько угодно раз.

**13. Ряд Тейлора.** Остановимся теперь более подробно на основных положениях теории степенных рядов, которые являются одним из видов функциональных рядов.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \cdots + c_n (z - z_0)^n + \cdots, \quad (1.244)$$

где  $c_k$  и  $z_0$  — постоянные комплексные числа.

Представление об области сходимости степенного ряда дает следующая теорема.

**Теорема Абеля.** Если степенной ряд (1.244) сходится в некоторой точке  $z = z_1$ , то он сходится и притом абсолютно и равномерно во всяком круге с центром  $z = z_0$  и радиусом  $R_0 < |z_1 - z_0|$ .

На границе круга  $|z_1 - z_0| = R$  ряд может как сходиться, так и расходиться, а в любой точке, лежащей вне круга ряд расходится (рис. 28).

Число  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда (1.244). В том случае, когда круг сходимости распространяется на всю комплексную плоскость, т. е. ряд (1.244) сходится для всех конечных  $z$ , считают, что  $R = \infty$ . Если же область

сходимости стягивается в точку, считают, что  $R = 0$ .

Радиус сходимости  $R$  ряда (1.214) можно определить по *формуле Коши — Адамара*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (1.245)$$

где  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  — верхний предел последовательности  $|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \dots, \sqrt[n]{|c_n|}, \dots$ , или по формуле, вытекающей из признака Даламбера о

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \quad (1.246)$$

Как уже отмечалось, степенной ряд сходится абсолютно и равномерно в каждом круге  $|z - z_0| \leq r < R$ . Во внутренности круга  $|z - z_0| < R$  сумма ряда (1.244) представляет некоторую аналитическую функцию  $f(z)$ . Кроме того, ряд

$$\int_L \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} + c, \quad (1.247)$$

полученный в результате почленного интегрирования ряда (1.244) вдоль некоторого пути  $L$ , лежащего целиком в круге сходимости, сходится и

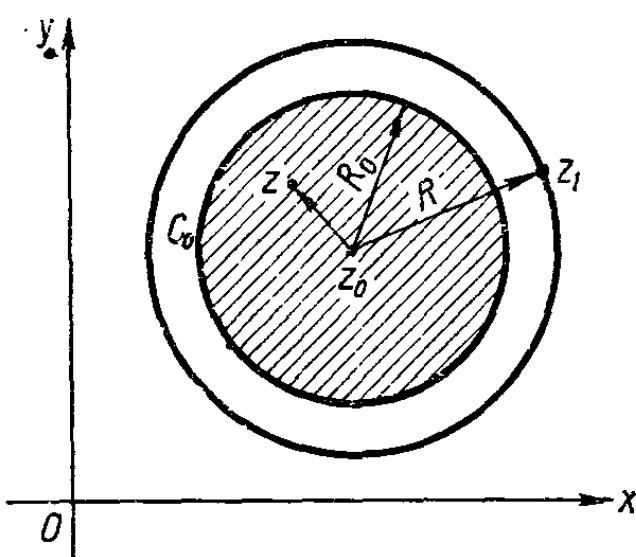


Рис. 28.

его сумма представляет собой соответствующий интеграл от  $f(z)$ , а ряд

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right\}' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}, \quad (1.248)$$

полученный в результате почленного дифференцирования ряда (1.244), также сходится равномерно внутри круга сходимости  $|z - z_0| < R$  и его сумма равна производной суммы  $f(z)$  данного ряда.

Итак, мы видим, что сумма степенного ряда (1.244) есть функция аналитическая внутри круга сходимости этого ряда. Верно и обратное утверждение, основанное на следующей теореме.

**Теорема.** Всякая функция  $f(z)$ , аналитическая в некотором круге  $|z - z_0| < R$  с центром в точке  $z_0$ , может быть представлена внутри этого круга степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1.249)$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (1.250)$$

и такое представление единственно. Ряд (1.249) называется рядом Тейлора функции  $f(z)$ . В формуле (1.250)  $C_0$  — окружность с центром в точке  $z = z_0$  и радиусом  $R_0 < R$  (см. рис. 28).

В самом деле, на основании интегральной формулы Коши (1.220) для точки  $z \neq z_0$  имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (1.251)$$

где точка  $z$  лежит внутри  $C_0$ .

Учитывая, что  $|\zeta - z_0| = R_0$ , а  $|z - z_0| = r$  и, кроме того,  $r < R_0$ , получим разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n. \end{aligned} \quad (1.252)$$

Подставив ряд (1.252) в (1.251), найдем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z)}{\zeta - z_0} \left[ 1 + \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right) + \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^3 + \cdots + \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + \cdots \right] d\zeta. \end{aligned}$$

Так как  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq q < 1$ , то ряд в квадратных скобках сходится абсолютно и равномерно, и, следовательно, его можно почленно интегрировать. Выполнив интегрирование и учитывая, что величину

$(z - z_0)^n$  можно вынести за знак интеграла, получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

или

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где, согласно общей интегральной формуле Коши (1.223), имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

что и требовалось доказать.

Представление функции  $f(z)$  рядом Тейлора (1.249) *единственно*, так как коэффициенты  $c_n$  определяются по формулам (1.250) единственным образом. Действительно, полагая в (1.249)  $z = z_0$ , получим  $c_0 = f(z_0)$ , а дифференцируя ряд (1.249) и полагая  $z = z_0$ , найдем  $c_1 = f'(z_0)$ . Поступая аналогично, найдем, что

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad (1.253)$$

т. е. что коэффициенты (1.250) и (1.253) совпадают.

Из приведенных рассуждений следует, что радиус сходимости степениного ряда для функции  $f(z)$  равен расстоянию от центра круга сходимости  $z = z_0$  до ближайшей особой точки этой функции.

Положив в (1.249)  $z_0 = 0$ , получим, как частный случай, так называемый ряд *Маклорена*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (1.254)$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \quad (1.255)$$

Используя разложение функций в ряд Тейлора (Маклорена), легко получить следующие разложения в ряд известных элементарных функций:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (1.256)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (1.257)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1) \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (1.258)$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (1.259)$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (1.260)$$

Пользуясь формулой (1.245) или (1.246), легко показать, что ряды (1.256) — (1.260) сходятся во всей комплексной плоскости  $z$ , т. е. что  $R = \infty$ .

Далее запишем ряд для логарифмической функции

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots, \quad (1.261)$$

радиус сходимости которого  $R = 1$ .

Заметим здесь, что приведенные разложения элементарных функций могут служить формальным определением этих функций в комплексной плоскости. Более того, посредством степенных рядов определяется ряд новых важных функций.

При помощи степенного ряда определяется так называемая *гипергеометрическая функция*

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{ab}{1c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2c(c+1)} z^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3c(c+1)(c+2)} z^3 + \dots \quad (1.262)$$

или

$$F(a, b, c, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(a+k)(b+k)}{(1+k)(c+k)} \right\} z^n. \quad (1.263)$$

Если  $c$  — отрицательное целое число, то все члены после ( $|c| + 1$ )-го имеют знаменателями нули; а если  $a$  и  $b$  — отрицательные целые числа, то ряд окончится соответственно ( $|a| + 1$ ) или ( $|b| + 1$ )-м членом.

Предположим, что эти случаи исключены, т. е.  $a$ ,  $b$  и  $c$  не будут отрицательными целыми числами. Для такого ряда при  $n \rightarrow \infty$  и, согласно формуле (1.246),

$$R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(c+n-1)}{(a+n-1)(b+n-1)} \right| = \\ = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{a+n-1} \right| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c+n-1}{b+n-1} \right| = 1. \quad (1.264)$$

В случае, когда  $a$ ,  $b$  и  $c$  являются комплексными числами  $a = a_1 + ia_2$ ,  $b = b_1 + ib_2$ ,  $c = \gamma_1 + i\gamma_2$ , можно доказать, что, для того чтобы ряд (1.262) был абсолютно сходящимся при  $|z| = 1$ , достаточно, чтобы действительная часть  $a + b - c$  была отрицательной.

При  $a = 1$  и  $b = c$  ряд (1.263) принимает вид

$$F(1, b, b, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z}, \quad (1.265)$$

т. е. гипергеометрический ряд обращается в *геометрическую прогрессию*, в результате чего он и получил свое название.

Всякая однозначная элементарная функция является аналитической во всех точках, в которых она определена. Но может случиться, что ряд Тейлора (или Маклорена) для данной элементарной функции сходится и в такой точке, в которой эта функция не определена. Условимся в этом случае приписывать рассматриваемой функции в соответствующей точке значение, равное сумме ее степенного ряда в этой точке.

Например, ряд

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \quad (1.266)$$

сходится во всей комплексной плоскости, однако, при  $z = 0$  левая часть равенства не определена. Учитывая, что сумма ряда (1.266) при  $z = 0$  равна 1, естественно считать, что  $\frac{\sin z}{z} = 1$  при  $z = 0$ .

Если степенной ряд сходится в круге  $|z - z_0| < R$  и его сумма  $f(z)$  по модулю ограничена числом  $M$  в круге сходимости ряда, то, пользуясь интегральной формулой для коэффициентов (1.250) и формулой (1.224), получим

$$|c_n| = \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{M}{R^n}$$

или

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.267)$$

Это неравенство называется *неравенством Коши* для коэффициентов ряда Тейлора.

Неравенство (1.267) показывает, что в вычислительном отношении более эффективными будут ряды с большими радиусами сходимости, так как коэффициенты ряда при этом будут быстрее убывать.

Из неравенства Коши (1.267) непосредственно вытекает следующая теорема.

**Теорема Лиувилля.** Если функция  $f(z)$  аналитична во всей плоскости и ограничена в этой плоскости, то она постоянна.

Действительно, в рассматриваемом случае разложение (1.249) имеет место для любой точки  $z$ . Из неравенства (1.267) при  $R \rightarrow \infty$  и  $n \geq 1$  получим  $c_n = 0$ , а значит  $f(z) = c_0 = \text{const}$ , что и требовалось доказать.

**14. Ряд Лорана и классификация особых точек. Понятие вычета.** Рассмотрим более общий вид степенного ряда, а именно:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = & \dots + c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \dots + c_{-2} (z - z_0)^{-2} + \\ & + c_{-1} (z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + \\ & + c_n (z - z_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (1.268)$$

Ряд (1.268) содержит не только целые положительные, но и целые отрицательные степени и называется *рядом Лорана*. Он представляет собой сумму двух рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots, \quad (1.269)$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n = c_{-1} (z - z_0)^{-1} + c_{-2} (z - z_0)^{-2} + \dots, \quad (1.270)$$

первый из которых является обычным степенным рядом, имеющим радиус сходимости  $R$  и рассмотренным нами в предыдущем пункте.

Ряд (1.270) при помощи замены

$$w = \frac{1}{z - z_0} = (z - z_0)^{-1} \quad (1.271)$$

можно преобразовать в ряд с положительными показателями, который сходится абсолютно в некотором круге  $|z| < \frac{1}{r}$  и сумма которого есть

функция, аналитическая внутри этого круга. Отсюда следует, что ряд (1.270) абсолютно сходится вне круга  $|z - z_0| \leq r$  и его сумма есть функция, аналитическая в области  $|z - z_0| > r$ .

Если  $r < R$ , то ряд Лорана (1.268) сходится абсолютно и равномерно внутри кольца

$$r < |z - z_0| < R,$$

и его сумма в этой кольцевой области  $D$  является аналитической функцией. В силу этого ряд (1.268) допускает почлененное дифференцирование и интегрирование в области  $D$ .

Если все  $c_{-n} = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), то ряд Лорана обращается в ряд Тейлора, который, следовательно, можно рассматривать как частный случай ряда Лорана.

Докажем теорему о представлении рядом Лорана однозначных функций комплексного переменного, имеющих точки, в которых не выполняются условия Коши — Римана, т. е. особые точки (см. п. 7).

**Теорема Лорана.** Каждая функция  $f(z)$ , аналитическая внутри кольца  $r < |z - z_0| < R$ , представляется в каждой внутренней точке этой кольцевой области  $D$  рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1.272)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (1.273)$$

Пусть задана функция  $f(z)$ , аналитическая внутри области  $D$ , ограниченной двумя концентрическими окружностями  $C$  и  $\gamma$  соответственно с радиусами  $R$  и  $r$  ( $0 < r < R$ ) и центрами в точке  $z = z_0$ . Выберем две концентрические окружности  $C_1$  и  $\gamma_1$  с центрами в той же точке  $z = z_0$  и с радиусами, соответственно  $R_1$  и  $r_1$ , удовлетворяющими неравенству  $0 < r < r_1 < R_1 < R$  (рис. 29).

Превращая двусвязную область  $D_1$ , ограниченную контурами  $C_1$  и  $\gamma_1$ , в односвязную при помощи разреза  $mn$  и применяя интегральную формулу Коши (1.220), получим для каждого  $z$ , не лежащего на разрезе  $mn$ , следующее равенство:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.274)$$

Разрез гибируется произвольно, поэтому соотношение (1.274) выполняется для всех  $z$  из области  $D_1$ .

В первом интеграле правой части (1.274) воспользуемся разложением в ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n, \quad (1.275)$$

который сходится равномерно относительно  $\zeta$ , лежащих на окружности  $C_1$  как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = q_1 < 1$ .

Во втором интеграле правой части (1.274) воспользуемся следующим разложением в ряд:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = - \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n, \quad (1.276)$$

который также сходится равномерно на окружности  $\gamma_1$  как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = q_2 < 1$ .

Подставляя (1.275) и (1.276) соответственно в первый и второй интегралы правой части (1.274) и почленно интегрируя, получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^{-n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta$$

или

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1.277)$$

где

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{-n+1}} d\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (1.278)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.278')$$

В силу формулы (1.219) в качестве контура интегрирования можно взять произвольный контур  $C$ , лежащий между  $C_1$  и  $\gamma_1$  и проходящий в положительном направлении (против часовой стрелки). Учитывая последние замечания, получим формулы (1.272) и (1.273).

Как видно из предыдущего, область  $D$  сходимости ряда Лорана является наибольшим кольцом, в котором  $f(z)$  еще аналитична. При этом на ограничивающих эту область окружностях  $C$  и  $\gamma$  лежит, по крайней мере, по одной особой точке.

Интерес представляет тот случай, когда центр этих окружностей  $z_0$  является единственной особой точкой внутри малого контура  $\gamma$  (см. рис. 29). В этом случае ряд Лорана сходится при всех  $z$ , для которых

$0 < |z - z_0| < R$ , а точка  $z_0$  называется *изолированной особой точкой*. Другими словами, точка  $z = z_0$  называется изолированной особой точкой, если внутри сколь угодно малой окрестности этой точки нет других особых точек, кроме самой точки  $z = z_0$ .

Отметим, что аналитическая функция  $f(z)$  может иметь не только изолированные особые точки. Например, функция  $f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{z}$  будет иметь не только изолированные особые точки вида  $z = \frac{2k+1}{(2k+1)\pi}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), но также и их *точку сгущения*  $z = 0$ , которая не является изолированной, ибо в любой сколь угодно малой окрестности точки  $z = 0$  содержится бесконечное множество других особых точек  $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$  этой функции (при достаточно больших  $k$ ).

Различают три типа изолированных точек в зависимости от поведения функции  $f(z)$  в окрестности этих точек:

1. Точка  $z_0$  называется *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = b$ .

2. Точка  $z_0$  называется *полюсом*, если  $f(z)$  является бесконечно большой при приближении  $z$  к точке  $z_0$ , т. е. если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

3. Точка  $z_0$  называется *существенно особой точкой*, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не существует.

Если функция  $f(z)$  внутри круга  $|z - z_0| < R$  не имеет особых точек, т. е. является аналитической в каждой точке круговой области, то, согласно изложенному в п. 13, внутри круга  $|z - z_0| < R$  с центром в точке  $z = z_0$  ее можно представить в виде ряда Тейлора (1.249)

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Точку  $z = z_0$  в этом случае называют *обыкновенной точкой* функции  $f(z)$ .

Если  $c_0 = f(z_0) = 0$ , то точка  $z_0$  называется *нулем* функции  $f(z)$  и разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$f(z) = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Если в разложении функции в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0$  имеем  $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$  и  $c_m \neq 0$ , т. е.  $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$  и  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ , то точка  $z = z_0$  называется *m-кратным нулем* или *нулем* функции  $f(z)$  порядка  $m$ . При  $m = 1$  получаем предыдущий случай. При этом  $z_0$  называется *простым нулем*. Если функция имеет *m-кратный нуль*, ее можно представить в виде

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad (1.279)$$

где  $\varphi(z_0) \neq 0$  и аналитична в точке  $z = z_0$ .

Теперь рассмотрим случай, когда функция  $f(z)$  имеет изолированную особую точку  $z = z_0$ . Согласно теореме Лорана, данную функцию  $f(z)$  в кольце  $0 < |z - z_0| < R$  можно разложить в ряд (1.247). Такое разложение называется *разложением функции в ряд Лорана* в окрестности данной изолированной точки  $z = z_0$ .

Отметим, что часть разложения (1.277), представляющая собой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots, \quad (1.280)$$

состоящий из членов с отрицательными степенями, называется *главной частью* ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots, \quad (1.281)$$

состоящий из членов с неотрицательными степенями, называется *правильной (или регулярной) частью* ряда Лорана.

Вид разложения функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности изолированных особых точек зависит от того, к какому типу относится данная изолированная особая точка  $z_0$ . В связи с этим приведем формулировки следующих теорем.

**Теорема 1.** Для того чтобы точка  $z_0$  была устранимой особой точкой функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы лораново разложение  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  не содержало главной части, т. е. имело вид

$$f(z) = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots \quad (1.282)$$

Название «устранимая особая точка» обусловлено тем, что такую особую точку можно «устрасти», доопределив функцию  $f(z)$  в точке  $z = z_0$ , полагая  $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ . После этого  $f(z)$  будет аналитической и в точке  $z = z_0$ , так как при условии  $f(z_0) = c_0$  во всем круге  $|z - z_0| < R$  она определяется как сумма степенного ряда. (См., например, функцию (1.266), которая имеет устранимую особую точку  $z = 0$ .)

**Теорема 2.** Для того чтобы точка  $z_0$  была полюсом функции  $f(z)$ , необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения  $f(z)$  в окрестности  $z_0$  содержала лишь конечное число членов, т. е. лорановское разложение функции  $f(z)$  должно иметь вид

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (1.283)$$

При этом номер  $m$  старшего члена с отрицательным показателем разложения (1.283) совпадает с порядком (кратностью) полюса.

**Теорема 3.** Точка  $z_0$  тогда и только тогда является существенно особой, когда главная часть лорановского разложения функции  $f(z)$  в окрестности  $z_0$  содержит бесконечно много членов.

Если функция  $f(z)$  задана в области  $\bar{D}$ , содержащей бесконечно удаленную точку  $z = \infty$ , то аналитичность, полюс, существенно особая точка и устранимая особенность определяются переводом бесконечно удаленной точки в начало координат посредством преобразования  $z = \frac{1}{\zeta}$ , учитывая, что  $|\zeta| \rightarrow 0$ , когда  $|z| \rightarrow \infty$ .

Функция  $f(z)$ , аналитическая при конечных  $z$ , для которых  $|z| > R$ , после преобразования  $z = \frac{1}{\zeta}$  переходит в аналитическую функцию  $\Phi(\zeta)$  при  $0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$ . В случае, когда  $\Phi(\zeta)$  аналитична и при  $\zeta = 0$ , говорят, что  $f(z)$  аналитична на бесконечности.

Если точка  $\zeta = 0$  — устранимая особая точка, полюс или существенно особая точка функции  $\varphi(\zeta)$ , то бесконечно удаленная точка  $z = \infty$  — соответственно устранимая особая точка, полюс или существенно особая точка функции  $f(z)$ . Разложение функции  $f(z)$  в окрестности бесконечно удаленной точки в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}. \quad (1.284)$$

Например, исследуем показательную функцию (1.256)

$$f(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

в бесконечно удаленной точке  $z = \infty$ .

Выполнив замену  $z = \frac{1}{\zeta}$ , получим

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta) = 1 + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2! \zeta^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \zeta^n}.$$

Отсюда следует, что функция  $e^z$  в бесконечно удаленной точке имеет существенно особую точку.

В заключение остановимся на одном важном понятии, связанном с разложением функции  $f(z)$  в окрестности изолированной особой точки. Пусть точка  $z = z_0$  — особая изолированная точка функции  $f(z)$ . Отметим, что в этом случае интеграл (1.213), вообще говоря, не равен нулю. Его значение, не зависящее от формы контура  $C$ , можно вычислить следующим образом. Разложим функцию  $f(z)$  в окрестности особой точки  $z_0$  в ряд (1.277), равномерно сходящийся на окружности  $C_1$  радиуса  $R_1$  (см. рис. 29) и проинтегрируем этот ряд почленно вдоль  $C_1$ , приняв во внимание, что

$$\int_{C_1} c_n (z - z_0)^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (1.285)$$

$$\int_{C_1} \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz = 2\pi i a_{-1}; \quad (1.286)$$

$$\int_{C_1} c_{-n} (z - z_0)^{-n} dz = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (1.287)$$

В результате получим

$$\int_{C_1} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}, \quad (1.288)$$

откуда

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(z) dz. \quad (1.289)$$

Значение интеграла (1.289), равное коэффициенту  $c_{-1}$  при первой отрицательной степени разложения функции  $f(z)$  в ряд Лорана, называется *вычетом (residu)* функции  $f(z)$  относительно особой точки  $z = z_0$  и обозначается

$$a_{-1} = \text{res}[f(z); z_0]. \quad (1.290)$$

Если функция  $f(z)$  имеет  $m$ -кратный полюс, то ее можно представить в виде ряда (1.283). Умножив левую и правую части (1.283) на  $(z - z_0)^m$ , получим

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{j=-m}^{\infty} a_j (z - z_0)^{j+m}. \quad (1.291)$$

Функция  $(z - z_0)^m f(z)$  является аналитической в точке  $z_0$ . Дифференцируя ее  $m - 1$  раз и затем переходя к пределу при  $z \rightarrow z_0$ , получим

$$a_{-1} = \operatorname{res}[f(z); z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\}. \quad (1.292)$$

Если внутри некоторого замкнутого контура  $C_0$  без точек самопересечения функция  $f(z)$  имеет только конечное число изолированных особых точек  $z_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ), то, используя равенство (1.218), легко показать, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz, \quad (1.293)$$

где  $C_k$  — достаточно малые замкнутые контуры, содержащие единственную особую точку  $z_k$ .

В правой части равенства (1.293) стоит, согласно (1.289), сумма вычетов функции  $f(z)$  относительно особых точек  $z_k$ . Поэтому (1.293) можно переписать следующим образом:

$$\int_{C_0} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z); z_k]. \quad (1.294)$$

Последнее равенство выражает содержание так называемой *основной теоремы теории вычетов*, которая имеет большое применение как в теоретическом, так и прикладном отношении.

## § 6. Обобщенное понятие аналитической функции

**15. Аналитическое продолжение.** Из теорем о разложении аналитической в области  $D$  функции в степенной ряд, из единственности этого разложения непосредственно следует одно из основных свойств

аналитических функций — *свойство их единственности*, заключающееся в том, что если две аналитические функции совпадают между собой в сколь угодно малой окрестности точки или даже на любом куске линии, то они тождественно совпадают друг с другом.

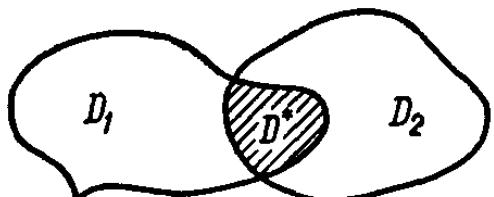


Рис. 30.

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в некоторой области  $D_0$ . Возникает вопрос, можно ли расширить область определения функции  $f(z)$ , т. е. существует ли такая функция  $F(z)$ , аналитическая в области  $D$ , содержащей внутри себя  $D_0$ , и совпадающая в  $D_0$  с функцией  $f(z)$ . Такое расширение области определения регулярной функции называется *аналитическим продолжением* функции.

Пусть заданы две функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$ , из которых первая аналитична в области  $D_1$ , а вторая — в области  $D_2$ . Допустим, кроме того, что области  $D_1$  и  $D_2$  имеют в качестве общей части некоторую область  $D^*$  (в частности, такой общей частью может быть участок общей границы областей  $D_1$  и  $D_2$ ), в которой функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  совпадают (рис. 30).

Тогда, используя замечание, сделанное в начале этого пункта, можно доказать, что функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  тождественно совпадают в области  $D = D_1 + D_2$  (предположение о существовании в области  $D$  двух других функций, совпадающих в  $D^*$  с  $f_1(z)$  или  $f_2(z)$ , приводит к противоречию с единственностью определения аналитической функции). В этом случае говорят, что функция  $f_1(z)$  аналитически продолжается в область  $D_2$ . Функция  $f_2(z)$  называется аналитическим продолжением функции  $f_1(z)$  в область  $D_2$ . Очевидно,  $f_1(z)$  является аналитическим продолжением функции  $f_2(z)$  в область  $D_1$ .

Вследствие полной однозначной определимости одной функции через другую, вообще говоря, нет никаких оснований рассматривать функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  как различные функции. Поэтому естественно рассматривать обе функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  как элементы одной и той же функции  $F(z)$ , аналитической во всей области  $D$ , составленной из  $D_1$  и  $D_2$ , т. е. в  $D = D_1 + D_2$ .

Поясним сказанное на примере. Примем за  $D_1$  круг  $|z| < 1$ , а за область  $D_2$  примем круг  $|z - i| < \sqrt{2}$  (рис. 31).

Пусть в области  $D_1$  задана функция

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad (1.295)$$

Построим функцию  $f_2(z)$ , аналитическую в области  $D_2$ , которая совпала бы с  $f_1(z)$  во всех точках области  $D^*$ . Этой функцией будет

$$f_2(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-i}{1-i} \right)^n, \quad (1.296)$$

так как ряд (1.296) сходится при  $\left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1$ , или, что то же самое, при  $|z - i| < \sqrt{2}$  и его сумма, определенная как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, равна  $\frac{1}{1-z}$ . Но сумма ряда

(1.295) также равна  $\frac{1}{1-z}$ , следовательно, в области  $D^*$   $f_1(z) = f_2(z)$ . Поэтому функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  являются аналитическим продолжением

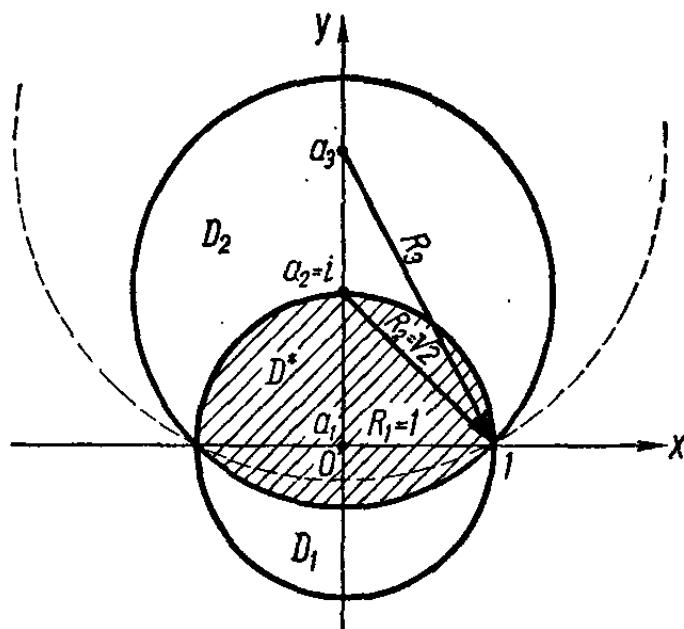


Рис. 31.

друг друга. Они есть элементы одной и той же функции  $F(z) = \frac{1}{1-z}$ , аналитической в области  $D = D_1 + D_2$ .

Аналитическое продолжение можно осуществлять при помощи разложения в ряд Тейлора, ограничиваясь, таким образом, только круговыми областями.

Пусть аналитическая функция  $F(z)$  задана рядом Тейлора, сходящимся в некоторой круговой области  $D$  с центром в точке  $z_0 = a_1$ ,

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)} (z - a_1)^n. \quad (1.297)$$

Будем называть этот ряд, сумма которого  $f_1(z)$  — функция, аналитическая в каждой внутренней точке круга сходимости  $D_1$  этого ряда, элементом функции  $F(z)$  в круге  $D_1$ .

Проведем из точки  $a_1$  некоторую линию  $\gamma$  и будем аналитически продолжать нашу функцию  $f_1(z)$  вдоль  $\gamma$ . Для этого на линии  $\gamma$  возьмем другую точку  $a_2$  такую, чтобы дуга  $a_1a_2$  лежала внутри области  $D_1$ . Затем напишем разложение функции  $f_1(z)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0 = a_2$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2)} (z - a_2)^n, \quad (1.298)$$

где

$$c_n^{(2)} = \frac{f_1^{(n)}(a_2)}{n!}. \quad (1.299)$$

Таким образом, мы построили новый элемент  $f_2(z)$  функции  $f(z)$  в некотором круге сходимости ряда (1.298). Если круг сходимости  $D_2$  выйдет за пределы круга  $D_1$ , то элемент  $f_2(z)$  будет аналитическим продолжением элемента  $f_1(z)$  (см., например, рис. 31).

После получения аналитического продолжения  $f_2(z)$  можно перейти к построению элемента  $f_3(z)$ , выбрав на  $\gamma$  новую точку  $a_3$ , такую, чтобы дуга  $a_2a_3$  принадлежала области  $D_2$ . Для этого, как и выше, построим ряд Тейлора по степеням  $(z - a_3)$

$$f_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(3)} (z - a_3)^n, \quad (1.300)$$

где

$$c_n^{(3)} = \frac{f_2^{(n)}(a_3)}{n!}. \quad (1.301)$$

Такое построение можно повторять до тех пор, пока не продолжим функцию  $F(z)$  на всю комплексную полуплоскость, за исключением отдельных изолированных особых точек. Указанный процесс продолжается до тех пор, пока не получим такую область существования  $D_0$  функции  $F(z)$ , за пределы которой функцию аналитически продолжить нельзя.

Область  $D_0$  называется *естественной (или полной) областью существования аналитической функции*. Граница  $\Gamma_0$  этой области существования  $D_0$  называется *естественной границей* данной функции. При этом все точки этой границы  $\Gamma_0$  являются особыми точками функции  $F(z)$ .

Полученная в результате описанного процесса аналитического продолжения функция  $F(z)$  называется *полной аналитической функцией* (по Вейерштрассу). Другими словами, *функция  $F(z)$ , полученная при*

помощи аналитического продолжения вдоль всевозможных цепочек областей, выходящих из области  $D_1$  первоначального задания аналитической функции  $f_1(z)$ , называется полной аналитической функцией, а ее область определения  $D_0$  называется естественной областью существования полной аналитической функции.

Функция (1.296), являющаяся аналитическим продолжением функции (1.295), именно и построена изложенным здесь методом аналитического продолжения по Вейерштрассу. Радиус сходимости элемента  $f_2(z)$  равен расстоянию от центра  $a_2 = i$  до особой точки-полюса  $z = 1$ , т. е.  $R_2 = \sqrt{2}$ . Если процесс продолжить, то построенный элемент  $f_3(z)$  функции  $F(z) = \frac{1}{1-z}$  будет иметь радиус сходимости  $R_3$ , равный расстоянию от выбранного центра  $z_0 = a_3$  до особой точки  $z = 1$  и т. д. (см. рис. 31). Функция  $F(z) = \frac{1}{1-z}$  является полной аналитической функцией во всей комплексной плоскости с исключенной точкой  $z = 1$ .

В целом ряде важных прикладных задач, решаемых при помощи методов теории функций комплексного переменного, трудно определить функцию в конечном, или так называемом, замкнутом виде (например,  $F(z) = \frac{1}{1-z}$ ). В этом случае функцию определяют только при помощи степенного ряда, определенного, вообще говоря, в некотором ограниченном круге  $D_n$ , и тогда путь аналитического продолжения единственно возможный.

Важную роль в приложениях играет так называемый *принцип перманентности*, который мы только сформулируем.

Если исходный элемент функции  $F(z)$  удовлетворяет некоторому уравнению, то и функции  $f_n(z)$ , которые можно получить из  $f(z)$  при помощи аналитического продолжения, также удовлетворяют этому же уравнению в их области существования.

**16. Римановы поверхности.** Таким образом, мы видим, что значения аналитической функции комплексного переменного  $f(z)$  в некоторой первоначальной области  $D_1$  вполне определяют значения функции вне этой области, если только расширение области, т. е. аналитическое продолжение, вообще возможно. Однако, совершая аналитическое продолжение, можно прийти и к многозначным функциям.

Пусть мы совершаляем аналитическое продолжение функции  $F(z)$  из области  $D_1$  в  $D_2$ , затем в  $D_3$ , причем область  $D_3$  пересекается с  $D_1$ . В общем случае области  $D_1, D_2, D_3, \dots$  могут иметь общие части помимо тех, в которых значения функции совпадают. Так, например, пусть на общей части областей  $D_1$  и  $D_2$  значения соответствующих элементов  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  функции  $F(z)$  совпадают, а на общей части областей  $D_3$  и  $D_1$  (на рис. 32 — заштрихована) значения элементов  $f_3(z)$  и  $f_1(z)$  функции  $F(z)$  не совпадают, т. е. значения функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  на пересечении областей  $D_1$  и  $D_3$  различны. В этом случае мы приходим к многозначной функции.

Чтобы геометрически избежать многозначности, будем считать, что заштрихованная часть состоит как бы из двух листов: одного, принадлежащего области  $D_1$ , и другого, принадлежащего области  $D_3$ . Область существования, состоящая более чем из одного листа, называется *многолистной*. Таким образом, области существования аналитических функций в общем случае будут представлять собой некоторые поверхности, которые называются *римановыми поверхностями*.

Рассмотрим пример построения римановых поверхностей. Пусть имеем функцию

$$w = \sqrt{(z - a)(z - b)}, \quad (1.302)$$

где  $a$  и  $b$  — комплексные числа.

Функция (1.302) имеет две точки разветвления  $z = a$  и  $z = b$ , при обходе каждой из которых функция меняет значение  $w$  на  $-w$ .

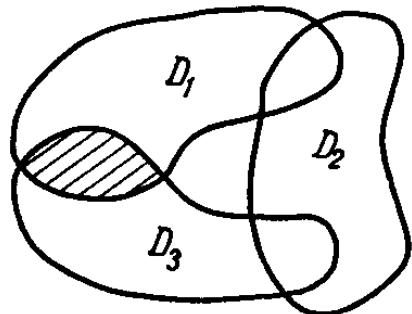


Рис. 32.

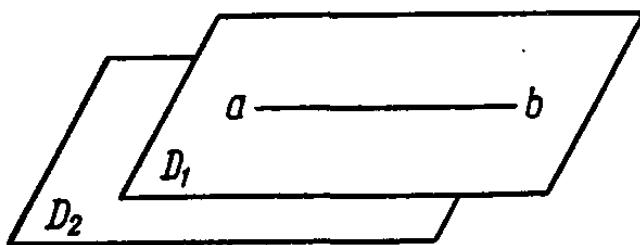


Рис. 33.

Чтобы одна ветвь функции (1.302) не могла перейти в другую, нужно устраниТЬ возможность обхода точек  $a$  и  $b$ . Для этого в плоскости  $z$  проведем разрез от точки  $a$  до точки  $b$ , например, вдоль отрезка прямой, соединяющей точки  $a$  и  $b$ . В такой плоскости  $D_1$  с разрезом (рис. 33), какую бы замкнутую кривую мы ни взяли, она либо не обойдет ни одной из точек, либо обойдет обе сразу.

В случае, когда границей области  $D_1$  служит разрез  $ab$ , каждая ветвь функции (1.302) является однозначной. Приготовим два экземпляра таких плоскостей с разрезом, т. е. листы  $D_1$  и  $D_2$ .

Тогда для каждого комплексного числа  $z$  будем иметь две точки: одну на листе  $D_1$ , а другую на листе  $D_2$ . Условимся, кроме того, для точек  $z$  одного листа выбирать значения функции со знаком «+», а для точек другого листа — со знаком «—». Представим теперь геометрически, как одна ветвь функции переходит в другую.

Для этого, верхний и нижний края разрезов соответственно первого и второго листов склеим с нижним и верхним краями разрезов соответственно второго и первого листов, как это показано на рис. 34.

Если теперь обходить точку  $a$  (или  $b$ ), то, дойдя до разреза, мы обязательно должны с одного листа перейти на другой. При рассмотренном обходе точек разветвления  $a$  и  $b$  первая ветвь функции будет переходить во вторую и наоборот.

Очевидно, область  $D = D_1 + D_2$ , представляющая риманову двухлистную поверхность, является полной областью существования функции  $w = \sqrt{(z - a)(z - b)}$ , причем функцию (1.302) на ее римановой поверхности  $D$  можно рассматривать как однозначную.

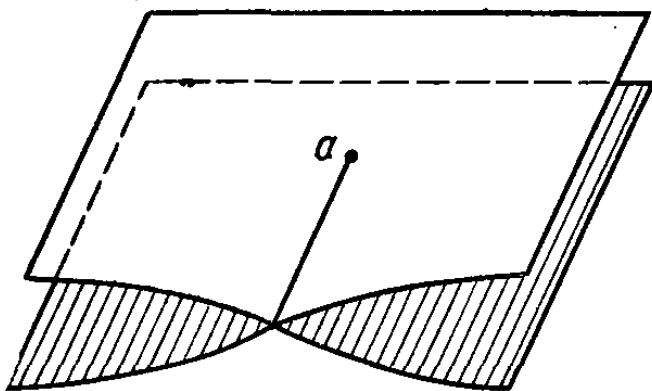
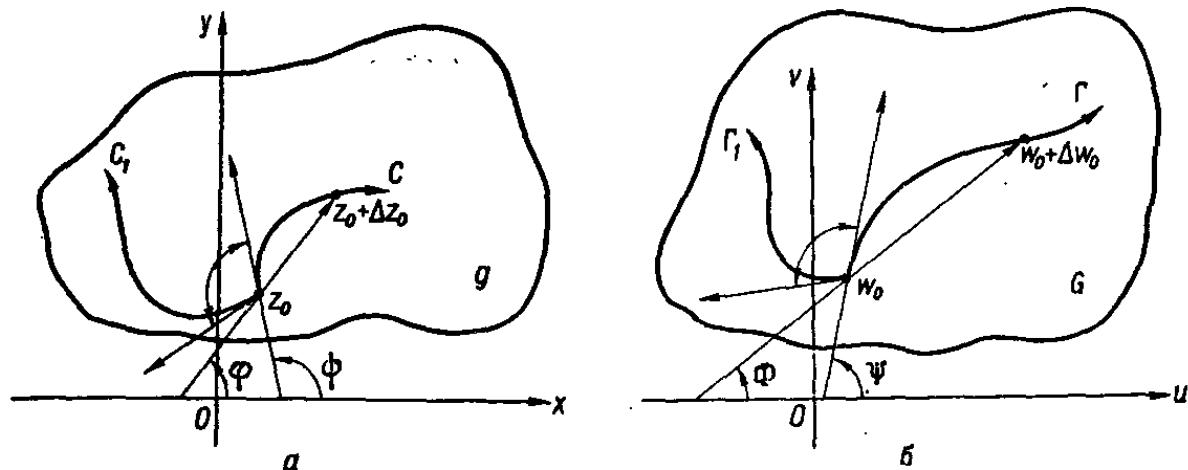


Рис. 34.

## § 7. Конформное отображение

**17. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.** В п. 5 было показано, что каждая комплексная функция вида  $w = u(x, y) + iv(x, y)$  осуществляет отображение (преобразование) некоторого заданного множества точек  $g$  плоскости  $z$  на некоторое другое множество точек  $G$  плоскости  $w$ .

Из многочисленных отображений, осуществляемых различными функциями, представляют большой теоретический и, в особенности, практический, интерес так называемые *конформные отображения*. Достаточно сказать, что при помощи метода конформных отображений с успехом решаются весьма сложные, представляющие огромный ин-



*Рис. 35.*

терес для практики, задачи гидро- и аэродинамики, теории фильтрации, теории упругости, теории теплового, магнитного, электростатического полей и многие другие.

Понятие конформного отображения тесно связано с геометрической иллюстрацией функций, аналитических в рассматриваемых областях. Перейдем к выяснению этого важнейшего понятия теории функций комплексного переменного.

Пусть задана функция  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , однолистная в области  $g$ . Как уже отмечалось, значения независимой переменной  $z = x + iy$  будем изображать точками плоскости  $z$ , а значения функции  $w = u + iv$  — точками плоскости  $w$ . Тогда при движении точки  $z$  в плоскости  $xOy$  по некоторой линии  $C$ , расположенной в области  $g$  и выходящей из точки  $z_0$ , соответствующий образ ее  $w$  в плоскости  $uOv$  опишет кривую  $\Gamma$ , выходящую из некоторой точки  $w_0$ . Таким образом, можно утверждать, что любая непрерывная функция  $w = f(z)$  отображает каждую точку  $z$  в некоторую точку  $w$ , а каждую линию  $C$  — в некоторую линию  $\Gamma$  (рис. 35, а, б).

Посмотрим теперь, какими свойствами будет обладать отображение, если отображающая функция  $w = f(z)$  будет не только непрерывной, но и аналитической.

Пусть линия  $C$  имеет в точке  $z_0$  определенную касательную. Функция  $w = f(z)$  отобразит точку  $z_0$  и линию  $C$  соответственно в точку  $w_0$  и линию  $\Gamma$  (см. рис. 35, а, б).

Предположим, что  $f'(z) \neq 0$  (если бы  $f'(z) = 0$ , то  $\operatorname{Arg} f'(z)$  был бы неопределенным), и выясним геометрический смысл модуля  $r$  и аргумента  $\alpha$  производной  $f'(z)$ , которую мы запишем в тригонометрической форме

$$f'(z) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad (1.303)$$

Возьмем произвольную точку  $z_0 + \Delta z_0$  на линии  $C$  и обозначим через  $w_0 + \Delta w_0$  соответствующий ей образ, лежащий на линии  $\Gamma$  в плоскости  $w$ . Если приближать точку  $z_0 + \Delta z_0$  к точке  $z_0$  вдоль линии  $C$ , то соответствующая ей точка  $w_0 + \Delta w_0$  будет приближаться по линии  $\Gamma$  к точке  $w_0$ , причем  $\Delta z_0$  и  $\Delta w_0$  одновременно стремятся к нулю.

Согласно определению производной, имеем

$$f'(z) = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad (1.304)$$

где

$$r = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right| = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{|\Delta w_0|}{|\Delta z_0|}; \quad (1.305)$$

$$\alpha = \operatorname{Arg} f'(z) = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0}. \quad (1.306)$$

Принимая во внимание, что аргумент дроби равен разности аргументов числителя и знаменателя, получаем

$$\operatorname{Arg} \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \operatorname{Arg} \Delta w_0 - \operatorname{Arg} \Delta z_0 = \alpha. \quad (1.307)$$

Очевидно,  $\Delta z_0 = (z_0 + \Delta z_0) - z_0$  изображается вектором, соединяющим точку  $z_0$  с точкой  $z_0 + \Delta z_0$  (см. п. 1), точно также  $\Delta w_0$  есть вектор, идущий от точки  $w_0$  к точке  $w_0 + \Delta w_0$ . Следовательно,  $\arg \Delta z_0$  есть угол  $\phi$  между положительным направлением оси  $Ox$  и соответствующим вектором  $\Delta z_0$ , а  $\arg \Delta w_0$  — угол  $\Phi$  между осью  $Ou$  и вектором  $\Delta w_0$ . Поэтому равенство (1.306) можно переписать в таком виде

$$\lim_{\Delta w_0 \rightarrow 0} \Phi - \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \phi = \alpha. \quad (1.308)$$

В пределе направления векторов  $\Delta z_0$  и  $\Delta w_0$  совпадают с направлениями соответствующих касательных в точке  $z_0$  и в точке  $w_0$  (см. рис. 35, а, б). Обозначив соответствующие углы наклона касательных через  $\psi$  и  $\Psi$ , из (1.308) получаем

$$\Psi - \psi = \alpha. \quad (1.309)$$

Проанализируем полученные результаты. Будем считать, что положительные направления осей  $Ox$  и  $Ou$  совпадают. Равенство (1.305) показывает, что отношение бесконечно малого расстояния между отображенными точками  $w_0$  и  $w_0 + \Delta w_0$  к расстоянию между их прообразами  $z_0$  и  $z_0 + \Delta z_0$  в пределе равно величине  $r = |f'(z)|$  и не зависит от направления линии  $C$ .

Другими словами, модуль производной  $r = |f'(z)|$  выражает величину изменения линейных размеров в точке  $z_0$  при отображении, осуществляющем функцией  $w = f(z)$ .

При  $r > 1$  происходит *растяжение* произвольно направленного бесконечно малого элемента, выходящего из точки  $z_0$  (масштаб увеличивается), при  $r < 1$ , наоборот, происходит *сжатие* (масштаб уменьшается).

При  $r = 1$  такой бесконечно малый элемент, выходящий из точки  $z_0$ , преобразуется в эквивалентный бесконечно малый элемент, выходящий из точки  $w_0$  (масштаб остается неизменным).

Таким образом, отображение, осуществляющее аналитической функцией  $w = f(z)$  обладает в каждой точке, где  $f'(z) \neq 0$ , *постоянным растяжением*  $r$ , не зависящим от выбранного направления.

Перепишем равенство (1.309) следующим образом:

$$\Psi = \psi + \alpha. \quad (1.310)$$

Тогда из (1.310) видно, что  $\alpha$  — угол, на который поворачивается касательная к линии  $C$  в точке  $z_0$  при отображении  $w = f(z)$ , т. е. угол между первоначальным и отраженным направлениями. Благодаря тому, что значение производной  $f'(z)$ , а следовательно, и значение  $\text{Arg } f'(z)$  не зависит от направления в данной точке, можно рассмотреть любую другую линию  $C_1$ , проходящую через точку  $z_0$  и имеющую в этой точке новое направление (см. рис. 35, а, б). При отображении  $w = f(z)$  линия  $C_1$  перейдет в линию  $\Gamma_1$ , проходящую через точку  $w_0$ . Равенство (1.309) остается в силе и для этой пары линий  $C_1$  и  $\Gamma_1$ , поэтому

$$\Psi' = \psi' + \alpha, \quad (1.311)$$

где  $\Psi'$  и  $\psi'$  — углы наклона касательных к линиям  $C_1$  и  $\Gamma_1$  соответственно в точках  $z_0$  и  $w_0$ .

Вычитая (1.311) из равенства (1.310), получим

$$\Psi - \Psi' = \psi - \psi', \quad (1.312)$$

т. е. линии  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , получаемые в результате отображения  $w = f(z)$ , образуют между собой в точке  $w_0$  тот же самый угол (по величине и направлению отсчета), который был образован между линиями  $C$  и  $C'$  при пересечении их в точке  $z_0$ . Это свойство называется кратко свойством консерватизма углов.

**18. Понятие конформного отображения.** Как было показано в предыдущем пункте, отображение, осуществляющее регулярной функцией  $w = f(z)$ , обладает в каждой точке  $z$ , где  $f'(z) \neq 0$ , двумя свойствами: *постоянством растяжений* и *консерватизмом углов*.

Отображение, обладающее свойством постоянства растяжений и консерватизма углов, называется *конформным* или *конформным отображением I рода*.

Все изложенное выше можно сформулировать в виде следующего утверждения.

**Теорема.** Если в точке  $z_0$  производная аналитической функции не равна нулю, то все бесконечно малые элементы линий, выходящих из точки  $z$ , при отображении поворачиваются на один и тот же угол, равный аргументу производной и получают одно и то же растяжение, равное модулю производной.

Если мы возьмем в плоскости  $z$  бесконечно малый треугольник, то он при помощи аналитической функции  $w = f(z)$  отобразится на некоторый другой бесконечно малый треугольник (рис. 36, а, б).

В силу малости треугольников можно пренебречь искривлением треугольника, изображенного в плоскости  $w$ . Кроме того, согласно изложенному выше, отображение рассматриваемых бесконечно малых треугольников будет конформным, т. е. соответственные углы в этих треугольниках будут равны, а отношения соответственных сторон с точностью до бесконечно малых будут равны одному и тому же постоянному числу  $r \neq 0$ . Такие два треугольника называются подобными.

Итак, конформное отображение является *отображением подобия в бесконечно малом* (вблизи каждой точки, где  $f'(z) \neq 0$ ).

Возьмем в плоскости аргумента бесконечно малую окружность  $\gamma$  с центром в точке  $z_0$  и проведем радиусы  $z_0 z_1, z_0 z_2$  и т. д. При конформном отображении они повернутся на один и тот же угол и получат одно и то же растяжение. При этом бесконечно малая окружность  $\gamma$

преобразуется в замкнутую кривую  $\Gamma$ , которую можно принять за окружность, пренебрегая бесконечно малыми величинами высших порядков (см. рис. 36, а, б).

Следовательно, конформное отображение преобразовывает бесконечно малую окружность снова в окружность.

Следует, однако, заметить, что из того факта, что конформное отображение является отображением подобия в бесконечно малом, вовсе не следует, что в целом при конформном отображении форма линий не изменяется. Коэффициент растяжения  $r = |f'(z)|$ , вообще говоря, меняется от точки к точке, поэтому форма линий в целом не может сохраняться (за исключением случая, когда  $f'(z) = \text{const}$ ), но углы между двумя любыми пересекающимися линиями при конформном отображении сохраняются во всех точках  $z$ , в которых  $f'(z) \neq 0$ .

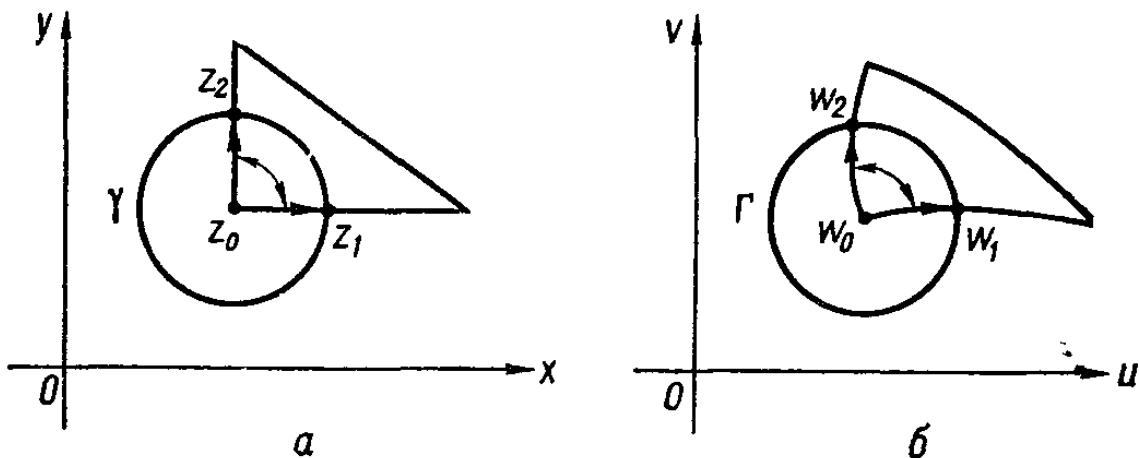


Рис. 36.

Так, например, сетка взаимно перпендикулярных прямых, параллельных осям  $Ox$  и  $Oy$ , при конформном отображении будет преобразовываться в общем случае в криволинейную сетку, но углы между кривыми при их пересечении останутся по-прежнему прямыми, т. е. сетка, как говорят, останется ортогональной.

*Отображение, осуществляющее аналитической функцией  $w = f(z)$ , будет конформным во всех точках, в которых функция аналитична. В особых же точках функции  $w = f(z)$  конформность нарушается.*

Преобразование, которое обладает постоянством растяжений и сохраняет величину углов, но изменяет направление отсчета углов на противоположное, называется *конформным отображением II рода*.

Такое преобразование, например, осуществляется функцией вида

$$w = \bar{z} = x - iy, \quad (1.313)$$

где  $z$  — комплексная величина, сопряженная с величиной  $z = x + iy$ . Функция (1.313) дает *зеркальное отражение* относительно действительной оси.

Можно показать, что если  $w = f(z)$  — аналитическая функция в некоторой области  $D$ , которая дает конформное отображение I рода, то функция  $w = \bar{f}(\bar{z})$ , сопряженная с данной, дает конформное отображение II рода.

В дальнейшем мы будем изучать только конформные отображения I рода, т. е. отображения, осуществляемые только аналитическими функциями.

**19. Основные принципы теории конформных отображений.** В предыдущем пункте было показано, что каждая аналитическая функция

осуществляет конформное отображение некоторой односвязной области  $g$  плоскости  $z$  на односвязную область  $G$  плоскости  $w$ .

В дальнейшем будем рассматривать только *взаимно однозначные конформные отображения*. Имея некоторую аналитическую функцию  $w = f(z)$ , можно произвольную область  $g$ , в которой эта функция однолистна, отобразить конформно на некоторую область  $G$ . Таким образом, можно получить различные примеры конформных отображений, имеющие большое значение в многочисленных приложениях. Именно, в таком аспекте построено изложение следующей главы.

Однако для практики большой интерес имеет и другой, более сложный вопрос, как по заданным областям  $g$  и  $G$  найти функцию, осуществляющую конформное отображение одной из этих областей на другую.

Как будет показано в гл. 3, такая задача может быть частично решена при помощи так называемого *интеграла Кристоффеля — Шварца*. Здесь же мы укажем только на возможность решения этой задачи с точки зрения теории.

Нельзя конформно отобразить полную или открытую плоскость  $z$  на ограниченную область  $D$  плоскости  $w$ . Действительно, если бы такое отображение существовало, то функция  $w = f(z)$  была бы аналитической во всей открытой плоскости и в то же время ограниченной, ибо все значения этой функции лежали бы в области  $D$ . Следовательно, в силу теоремы Лиувилля (п. 13) данная функция  $f(z)$  должна быть постоянной, что невозможно. Сформулируем теорему Римана, которую часто называют основной теоремой теории конформных отображений.

**Теорема.** Каждая односвязная область  $D$ , отличная от полной плоскости или от плоскости с выключенной точкой, может быть при помощи аналитической функции отображена взаимно однозначно и конформно на внутренность единичного круга и притом так, что произвольно заданным в  $D$  точке и направлению в этой точке будут соответствовать нулевая точка и направление действительной оси.

Заметим, что при упомянутых в теореме начальных условиях искомая отображающая функция будет единственной. Для единственности рассматриваемой задачи существует *три эквивалентных требования*, а именно, чтобы искомое отображение было единственным, должно выполняться одно из следующих условий:

1. Произвольно заданная внутренняя точка  $z_0$  из области  $g$  отображается в заданную точку  $w_0$  из области  $G$  и заданное направление в  $z_0$  переходит в заданное в точке  $w_0$  направление.

2. Две произвольно заданные точки  $z_1$  и  $z_2$ , одна из которых лежит внутри, другая — на границе области  $g$ , отображаются соответственно заданные точки  $w_1$  и  $w_2$ , из которых  $w_1$  находится внутри, а  $w_2$  — на границе области  $G$ .

3. Три произвольно заданные точки  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$ , расположенные на границе области  $g$ , отображаются в произвольно заданные граничные точки  $w_1$ ,  $w_2$  и  $w_3$  области  $G$ .

Об условиях, которые определяют собой однозначность отображения, говорят, что они *нормируют* рассматриваемое конформное отображение. В дальнейшем мы будем осуществлять нормировки отображения, главным образом, при помощи задания трех пар точек, лежащих на границах отображаемых областей  $g$  и  $G$ .

Остановимся вкратце еще на трех принципах, играющих исключительно важную роль при фактическом отыскании отображающих функций.

**Принцип соответствия границ.** Пусть даны две односвязные области  $g$  и  $G$  с границами  $\gamma$  и  $\Gamma$ , причем область  $G$  ограничена. Если задана аналитическая в  $g$  функция  $w = f(z)$ , непрерывная в замкнутой области  $\bar{g} = g + \gamma$  и осуществляющая взаимно однозначное конформное отображение  $\gamma$  на  $\Gamma$ , то она осуще-

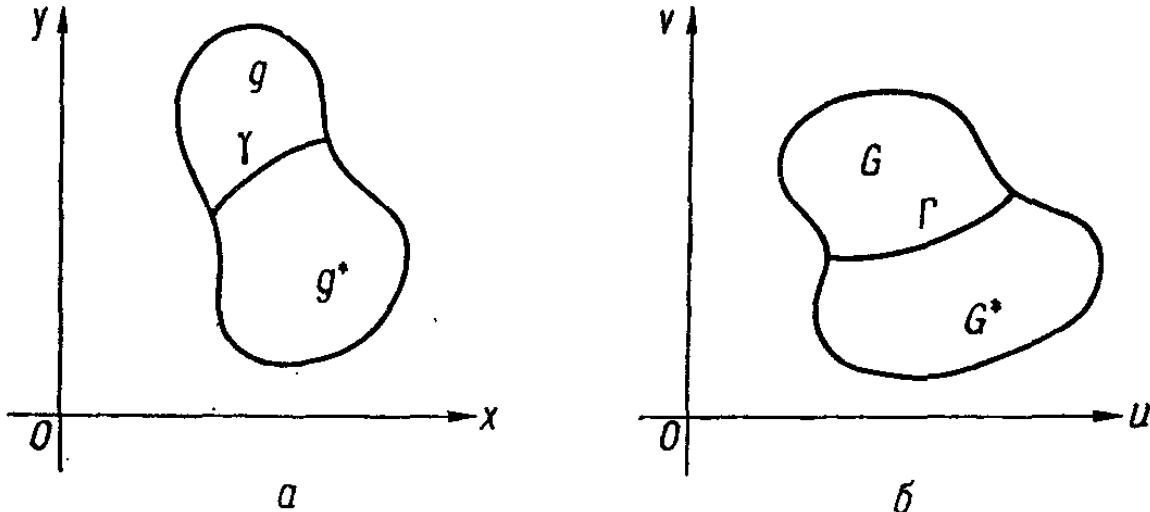


Рис. 37.

ствляет также однолистное конформное отображение области  $g$  на область  $G$  (границы  $\gamma$  и  $\Gamma$  могут проходить и через бесконечно удаленную точку  $z = \infty$ ).

Второй весьма важный в практике конформных отображений принцип формулируется следующим образом.

**Принцип симметрии.** Пусть граница области  $g$  содержит дугу окружности или прямолинейный отрезок  $\gamma$ , а граница области  $G$  содержит дугу окружности или прямолинейный отрезок  $\Gamma$  (рис. 37, а, б) и пусть функция  $w = f(z)$  осуществляет конформное отображение области  $g$  на  $G$  таким образом, что дуга  $\gamma$  отображается на дугу  $\Gamma$ . Предполагая, что область  $g$  не содержит ни одной пары симметричных относительно дуги  $\gamma$  точек, справедливо следующее.

1. Функцию  $w = f(z)$  можно аналитически продолжить через дугу  $\gamma$  на область  $g^*$ , симметричную с  $g$  относительно дуги  $\gamma$ .

2. Аналитически продолженная функция  $w = f(z)$  реализует конформное отображение области  $g + \gamma + g^*$  на область  $G + \Gamma + G^*$ .

3. Функция  $w = f(z)$  пару взаимно симметричных относительно  $\gamma$  точек (одна из которых принадлежит  $g$ ) будет конформное отображать в пару точек, взаимно симметричных относительно дуги  $\Gamma$ .

В заключение отметим еще одно теоретическое положение, которое, как и первые два, значительно облегчает находить геометрические образы и их совокупности (области) при рассмотрении конкретных конформных отображений.

**Принцип сохранения области.** Если аналитическая в области  $g$  функция  $w = f(z)$  отлична от постоян-

ной, то множество точек  $g$ , являющееся областью, при помощи этой функции конформно отображается на множество точек  $G$ , являющимся также областью, причем направление обхода границ областей  $g$  и  $G$  сохраняется.

Например, если при обходе границы  $g$  область остается слева, то и при соответствующем обходе границы области  $G$  последняя также будет находиться слева.

На этом мы заканчиваем изложение некоторых сведений из теории функций комплексного переменного, которые являются вводным материалом, облегчающим чтение последующих глав для лиц, мало знакомых с курсом теории функций комплексного переменного. Те, кто пожелает глубоко изучить теорию, могут воспользоваться литературой, приведенной в конце справочника.

## КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

При решении основной задачи теории конформных отображений — задачи отыскания функции, осуществляющей конформное отображение одной заданной области на другую, приходится прибегать к различным специальным методам. Одним из методов является подбор надлежащих комбинаций элементарных функций при условии, что удается найти области, которые отображаются этими функциями. Такой подбор предполагает свободное владение геометрическими свойствами элементарных функций комплексного переменного — важного раздела теории конформных отображений, которому и посвящается настоящая глава.

### § 1. Линейная функция

**20. Целая линейная функция.** Отображение, реализуемое *целой линейной функцией*

$$w = az + b, \quad (2.1)$$

где  $a \neq 0$ ,  $b$  — произвольные комплексные постоянные, является *конформным* (даже подобным «в целом») во всей *расширенной плоскости*, так как  $\frac{dw}{dz} = a$ , и *взаимно однозначным*, поскольку

$$z = \frac{1}{a} w - \frac{b}{a}.$$

Для большей наглядности при рассмотрении отображения (2.1) будем изображать  $z$  и  $w$  точками в одной плоскости.

Найдем *неподвижные точки*, т. е. точки, которые при отображении переходят сами в себя. Одной из неподвижных точек будет  $z^*_0 = \infty$ , для которой  $w^* = \infty$ . Для нахождения второй неподвижной точки в левой части равенства (2.1) положим  $w = z$ , т. е.

$$z = az + b,$$

откуда находим вторую неподвижную точку

$$z_0^{**} = \frac{b}{1 - a}. \quad (2.2)$$

При  $a = 1$  имеем  $z_0^{**} = \infty$ , в этом случае обе неподвижные точки совпадают.

Исследование преобразования (2.1) начнем с рассмотрения его частного случая, когда  $a = 1$ ,

$$w = z + b. \quad (2.3)$$

В силу геометрического смысла сложения комплексных чисел это преобразование является сдвигом (параллельным переносом) конечной плоскости на вектор  $b$ . При таком преобразовании прямые, параллельные вектору  $b$ , отображаются сами в себя (рис. 38, а).

Рассмотрим теперь преобразование

$$w = az, \quad (2.4)$$

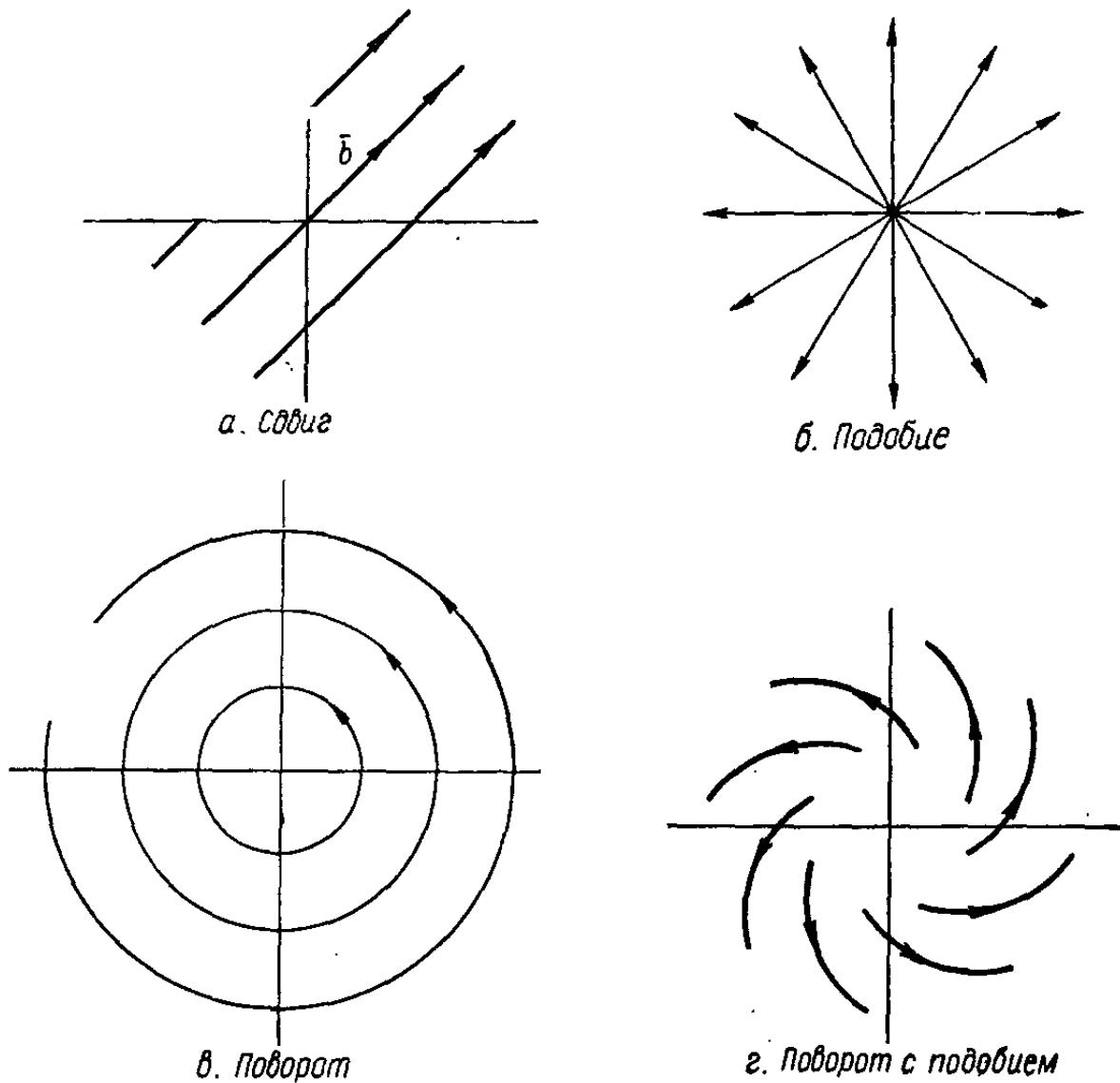


Рис. 38.

для которого будем различать три случая:

1)  $a = r$ , ( $r > 0$ ). Так как  $\arg r = 0$ , то в соответствии с правилом умножения комплексных чисел

$$\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z, \quad |w| = r|z|.$$

Поэтому сами в себя отображаются прямые, проходящие через начало координат. Это — *преобразование подобия* с центром подобия в нулевой точке (в начале координат) и с коэффициентом подобия (растяжения)  $r$  (рис. 38, б).

2)  $a = e^{i\varphi}$  ( $\varphi \neq 0$ ). В этом случае

$$\operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z + \varphi, \quad |w| = |z|.$$

Сами в себя переходят концентрические окружности с центром в начале координат, т. е. преобразование осуществляется чистый *поворот* (рис. 38, в).

3)  $a = re^{i\phi}$  ( $r \neq 1$ ,  $\phi \neq 0$ ). Это преобразование можно произвести последовательным выполнением *преобразований подобия и поворота*. При этом сами в себя переходят *логарифмические спирали* (рис. 38, г).

Общее целое линейное преобразование (2.1) можно представить как результат последовательных преобразований (2.3) и (2.4). Однако его можно рассмотреть с несколько иной точки зрения. Если  $a \neq 1$  (когда  $a = 1$ , преобразование будет простым параллельным переносом), то преобразование (2.1) имеет конечную неподвижную точку  $z_0^{**}$  и, учитывая (2.2), его можно записать в виде

$$w - z_0^{**} = a(z - z_0^{**}). \quad (2.5)$$

Преобразование (2.1) приняло вид (2.4), причем роль начала координат играет неподвижная точка  $z_0^{**}$ . Таким образом, целое линейное отображение (2.1) представляет собой или *сдвиг* ( $a = 1$ ), или *поворот* около точки  $z_0^{**}$  и отображение подобия с центром в этой же точке. При этом сохраняются отношения длин отрезков и углы. Поэтому, если три точки  $z_1, z_2, z_3$  переходят соответственно в точки  $w_1, w_2, w_3$ , то

$$\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}. \quad (2.6)$$

Отсюда заключаем, что всегда существует целая линейная функция, переводящая две данные точки  $z_1$  и  $z_2$  в две заданные точки  $w_1$  и  $w_2$ . Эту функцию можно представить в виде

$$\frac{w - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2.7)$$

**21. Функция  $w = \frac{1}{z}$ .** Отображение, осуществляющее функцией

$$w = \frac{1}{z}, \quad (2.8)$$

взаимно однозначно во всей расширенной плоскости, причем точкам  $z = 0$  и  $z = \infty$  соответствуют точки  $w = \infty$  и  $w = 0$ .

Производная рассматриваемой функции

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}$$

принимает конечное значение, не равное нулю, во всех точках плоскости, кроме точек  $z = 0$  и  $z = \infty$ . Так как принято считать, что угол между двумя линиями в бесконечно удаленной точке равен углу между отображенными линиями посредством функции  $w = \frac{1}{z}$  в начале координат, то отображение (2.8) *конформно* во всей плоскости.

Для исследования отображения, реализуемого функцией  $w = \frac{1}{z}$ , удобно ввести полярные координаты. Тогда подставив

$$z = re^{i\phi}, \quad w = \rho e^{i\theta}$$

в уравнение (2.8), найдем

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \theta = -\phi.$$

Следовательно, преобразование (2.8) можно разбить на два более простых

$$z' = \frac{1}{\bar{z}} \quad \left( r' = \frac{1}{r}, \quad \varphi' = \varphi \right) \quad (2.9)$$

и

$$w = \bar{z}' \quad (\rho = r', \quad \theta = -\varphi'), \quad (2.10)$$

каждое из которых — конформное отображение II рода.

Преобразование (2.9) называется, как уже отмечалось, *инверсией* или *преобразованием симметрии* относительно единичной окружности. Оно переводит каждую точку  $z$  в симметричную относительно этой окружности точку  $z'$  (см. п. 2).

Отображение (2.10) переводит каждую точку  $z'$  в симметричную относительно действительной оси точку  $\bar{z}'$ , т. е. является преобразованием симметрии относительно действительной оси.

Рассматривая отображение  $w = \frac{1}{z}$  как результат двух преобразований (2.9) и (2.10), видим, что оно меняет местами внутренность единичного круга с его внешностью и верхнюю полуплоскость с нижней.

Покажем, что при отображении  $w = \frac{1}{z}$  любая окружность снова переходит в некоторую окружность, при этом под прямой линией принято считать такую окружность, которая проходит через бесконечно удаленную точку.

Уравнение произвольной окружности в плоскости  $z$  имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (2.11)$$

где в случае прямой линии  $A = 0$ . Применим к нему преобразование (2.8). Для этого из равенства

$$z = \frac{1}{w}$$

или

$$x + iy = \frac{1}{u + iv}$$

найдем

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}.$$

Подставив в уравнение (2.11) вместо  $x$  и  $y$  их значения, получим уравнение отображенной линии

$$\frac{A}{u^2 + v^2} + \frac{Bu}{u^2 + v^2} - \frac{Cv}{u^2 + v^2} + D = 0,$$

или

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0,$$

которое является также уравнением окружности.

Докажем, что функция  $w = \frac{1}{z}$  отображает любую пару точек  $z_1$  и  $z_2$ , симметричных относительно произвольной окружности  $C$ , в пару точек  $z'_1$  и  $z'_2$ , симметричных относительно окружности  $C'$ , которая является образом окружности  $C$ .

Покажем сначала, что точки  $z_1$  и  $z_2$  тогда и только тогда являются симметричными относительно окружности  $C$ , когда пучок окружностей, проходящих через эти точки, будет *ортогональным* к окружности  $C$ .

Пусть точки  $z_1$  и  $z_2$  симметричны относительно окружности  $C$  с центром в точке  $z = z_0$  и радиусом, равным  $r$ , а  $\Gamma$  — какая-либо окружность, проходящая через  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 39). По известной теореме элементарной геометрии квадрат длины касательной  $z_0P$  к окружности  $\Gamma$  равен произведению секущей на ее внешнюю часть, т. е.

$$|P - z_0|^2 = |z_1 - z_0| |z_2 - z_0|.$$

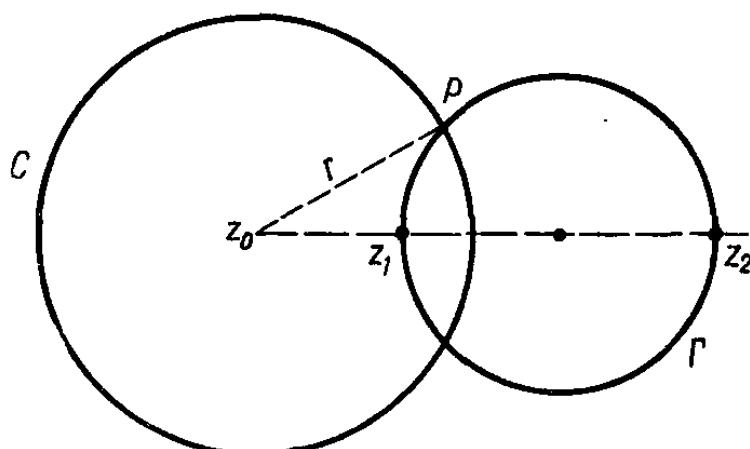


Рис. 39.

Но в силу симметрии точек  $z_1$  и  $z_2$  относительно окружности  $C$  правая часть равенства равна  $r^2$ . Следовательно, касательная к окружности  $\Gamma$  является радиусом окружности  $C$  и эти окружности ортогональны.

Обратно, если пучок окружностей, которые проходят через точки  $z_1$  и  $z_2$ , ортогонален к окружности  $C$ , то прямая  $z_1z_2$ , принадлежащая пучку,

проходит через центр  $z_0$  окружности  $C$ . Далее, так как окружность  $\Gamma$  ортогональна к окружности  $C$ , то  $|P - z_0| = r$  и по указанной выше теореме

$$|z_1 - z_0| |z_2 - z_0| = |P - z_0|^2 = r^2,$$

т. е. точки  $z_1$  и  $z_2$  симметричны относительно окружности  $C$ .

Так как функция  $w = \frac{1}{z}$  отображает окружность  $C$  и пучок ортогональных к ней окружностей, проходящих через точки  $z_1$  и  $z_2$ , в окружность  $C'$  и пучок ортогональных к ней окружностей, проходящих через точки  $z'_1$  и  $z'_2$ , то точки  $z'_1$  и  $z'_2$  будут симметричными относительно окружности  $C'$ , что и требовалось доказать.

Рассмотрим, во что перейдет декартова сетка плоскости  $z$  при отображении  $w = \frac{1}{z}$ . Очевидно, что координатные оси  $x = 0$  и  $y = 0$  плоскости  $z$  перейдут в координатные оси  $u = 0$  и  $v = 0$  плоскости  $w$ . Так как прямые  $x = \text{const}$  проходят через бесконечно удаленную точку, ортогонально действительной оси, то их образами являются окружности, касающиеся в начале координат мнимой оси. Расположение каждой из окружностей определяется заданием ее второй точки пересечения с действительной осью. Образом прямой  $x = u_0$  является окружность, пересекающая действительную ось в точке  $w = \frac{1}{u_0}$ . Прямые  $y = \text{const}$  перейдут в окружности, касающиеся в начале координат действительной оси. В целом, декартова сетка плоскости  $z$  отображается в два пучка окружностей, проходящих через начало координат и образующих ортогональную сетку (рис. 40, а, б).

**22. Дробно-линейная функция.** Рассмотренные в пп. 20 и 21 функции  $w = az + b$  и  $w = \frac{1}{z}$  являются частными случаями дробно-

линейной функции \*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.12)$$

которую мы сейчас и рассмотрим.

Разрешив уравнение (2.12) относительно  $z$ , найдем

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad (2.13)$$

т. е. обратная функция также дробно-линейная. Следовательно, отображение, осуществляющее функцией (2.12), взаимно однозначно во

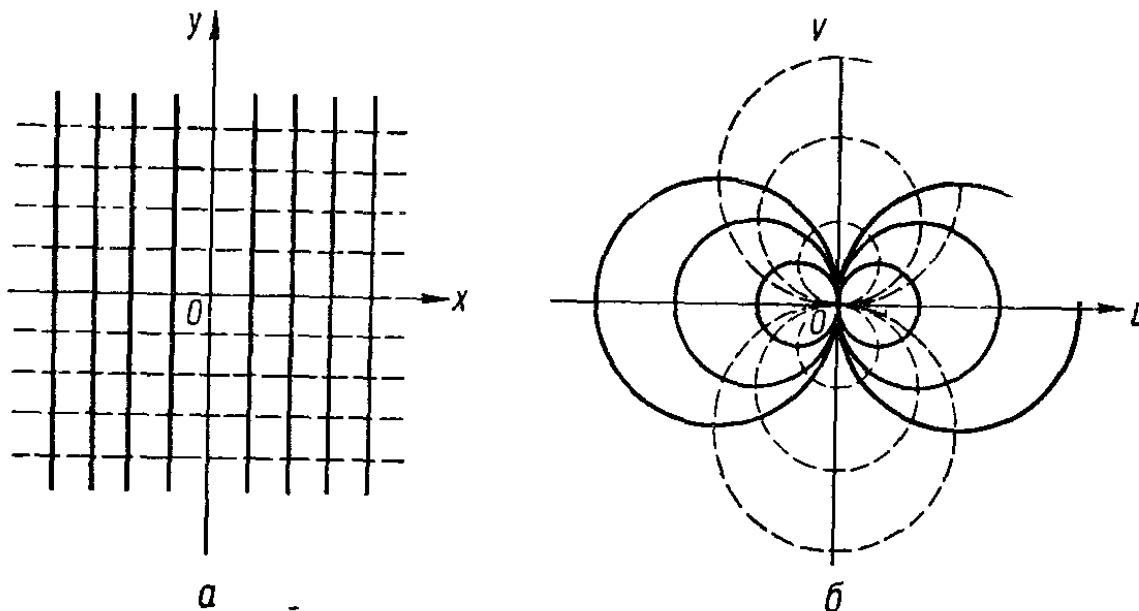


Рис. 40.

всей плоскости, при этом точке  $z = -\frac{d}{c}$  соответствует бесконечно удаленная точка плоскости  $w$ , а точке  $w = \frac{a}{c}$  соответствует бесконечно удаленная точка плоскости  $z$ .

Покажем, что результат двух последовательно выполненных дробно-линейных отображений будет также дробно-линейным отображением.

Пусть

$$\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad (2.14)$$

и

$$w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}. \quad (2.15)$$

Тогда подставляя в формулу для  $w$  вместо  $\zeta$  его значение, найдем

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

---

\* Функцию (2.12) называют также общей линейной или билинейной функцией.

где

$$\begin{aligned} a &= a_1 a_2 + b_2 c_1, \\ b &= a_2 b_1 + b_2 d_1, \\ c &= a_1 c_2 + c_1 d_2, \\ d &= b_1 c_2 + d_1 d_2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Отметим, что если с дробно-линейным отображением (2.12) связать матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

то обратному отображению (2.13) соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

а последовательному выполнению двух отображений (2.14) и (2.15) — произведение матриц

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

При  $c \neq 0$ , (когда  $c = 0$ , получаем целое линейное отображение) функцию (2.12) можно представить в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}. \tag{2.17}$$

Отсюда заключаем, что дробно-линейное отображение можно разложить на три последовательных отображения

$$w_1 = cz + d, \quad w_2 = \frac{1}{w_1}, \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} w_2. \tag{2.18}$$

Первое и третье преобразования осуществляются целыми линейными функциями, второе — функцией вида  $w = \frac{1}{z}$ . Поэтому, если целая линейная функция и функция  $w = \frac{1}{z}$  обладают каким-либо свойством, то этим свойством обладает также и дробно-линейная функция. Следовательно, дробно-линейная функция обладает следующими свойствами:

1) взаимно однозначно и конформно отображает на себя расширенную комплексную плоскость;

2) любую окружность преобразует в некоторую окружность;

3) любую пару точек, симметричных относительно произвольной окружности, преобразует в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности.

Докажем еще, что дробно-линейное преобразование, отличное от тождественного  $w = z$ , имеет не более двух неподвижных точек.

Действительно, эти точки, согласно (2.12), определяются как корни уравнения

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

или

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (2.19)$$

Квадратное уравнение имеет более двух корней лишь тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Но при  $c = b = 0, a = d$  получаем тождественное преобразование  $w = z$ .

При  $c \neq 0$ \* корнями квадратного уравнения (2.19) будут

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}. \quad (2.20)$$

Если  $(a - d)^2 + 4bc \neq 0$ , то дробно-линейное преобразование имеет две различные неподвижные точки, если же  $(a - d)^2 + 4bc = 0$ , то обе неподвижные точки совпадают.

Рассмотрим вначале дробно-линейное преобразование с двумя различными неподвижными точками  $z_1$  и  $z_2$ , которое обозначим через  $S$ . Для большей наглядности будем изображать  $z$  и  $w$  точками в одной плоскости. Введем в рассмотрение еще вспомогательную плоскость, в которой будем изображать новые переменные

$$Z = \frac{z - z_1}{z - z_2} \equiv L(z); \quad W = \frac{w - z_1}{w - z_2} \equiv L(w). \quad (2.21)$$

Функция  $L S L^{-1}$ \*\*, устанавливающая зависимость между  $Z$  и  $W$ , имеет неподвижные точки  $0$  и  $\infty$ , поэтому она должна иметь вид

$$W = kZ, \quad (2.22)$$

где  $k$  — некоторая комплексная постоянная.

Отсюда следует, что дробно-линейное преобразование  $S$  можно записать в так называемой *нормальной форме*

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad (2.23)$$

Постоянная  $k$ , не зависящая от  $z$ , легко может быть определена. Полагая в уравнении (2.23)  $z = 0$  и соответствующее ему значение  $w = \frac{b}{d}$ , находим

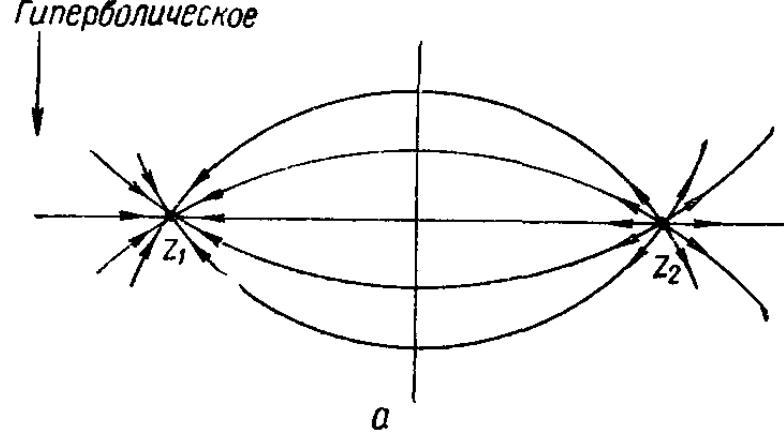
$$k = \frac{a + d - \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{a + d + \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}.$$

Для нормальной формы дробно-линейного преобразования (2.23), как и для рассмотренного в п. 20 преобразования (2.22), будем различать следующие три случая:

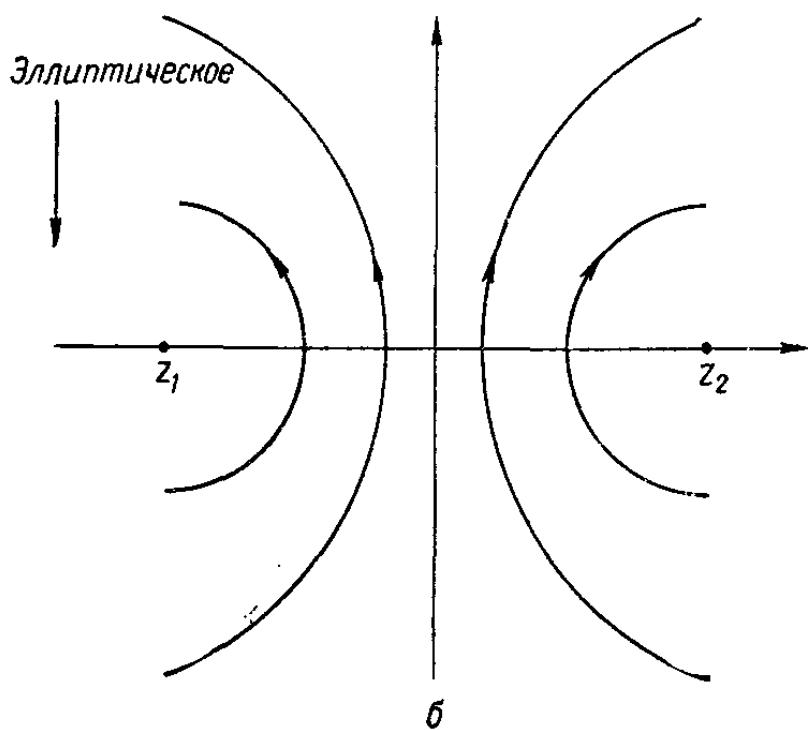
- 1)  $k = r (r > 0)$ .
- 2)  $k = e^{i\varphi} (\varphi \neq 0)$ .
- 3)  $k = re^{i\varphi} (r \neq 1, \varphi \neq 0)$ .

\* Случай, когда  $c = 0$ , рассмотрен в п. 20.

\*\*  $L^{-1}$  означает преобразование, обратное  $L$ .

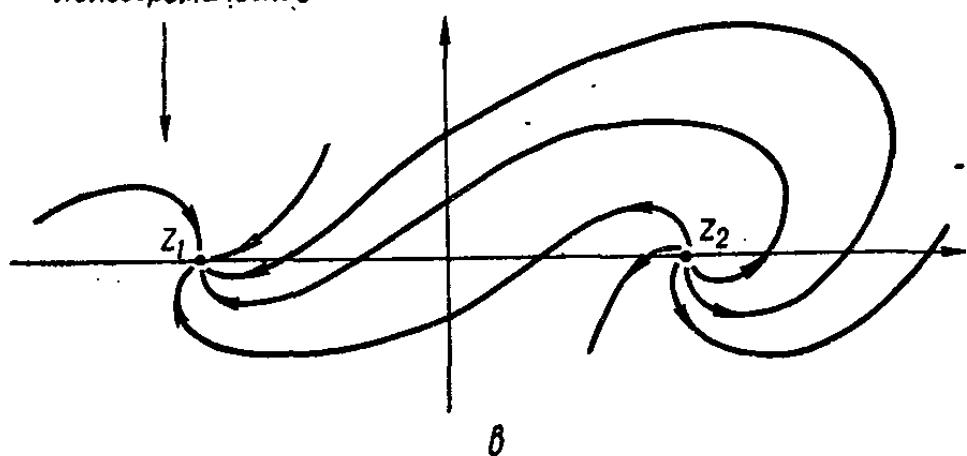


а



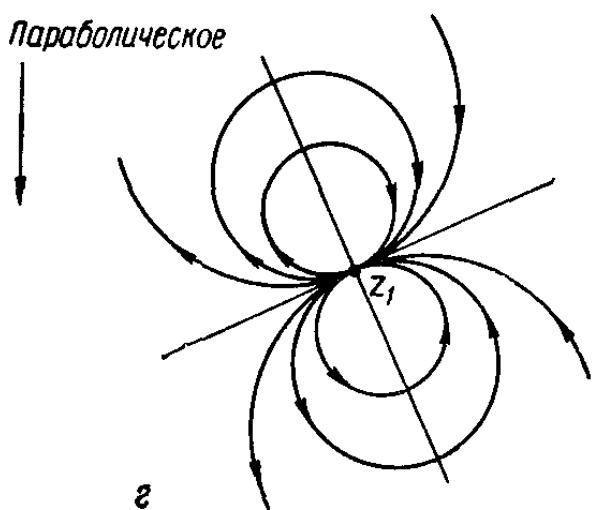
б

Локソидомическое



в

Параболическое



г

Рис. 41.

В первом случае преобразование называется *гиперболическим*, во втором — *эллиптическим* и в третьем — *локсодромическим*.

Так как при гиперболическом преобразовании (2.22) сама в себя переходит каждая прямая, проходящая через начало координат, при эллиптическом — любая окружность с центром в начале координат и при локсодромическом — логарифмическая спираль, то при переходе к общему случаю (2.23) надо рассмотреть, во что перейдут указанные линии при отображении  $L^{-1}$ . Очевидно, что пучок прямых, проходящих через начало координат, и пучок ортогональных им окружностей отображаются в два пучка окружностей, из которых первый состоит из окружностей, проходящих через неподвижные точки  $z_1$  и  $z_2$ , а второй — из окружностей, им ортогональных; логарифмические спирали отображаются в линии, называемые *локсодромами*.

Следовательно, при гиперболическом преобразовании (2.23) каждая из окружностей первого пучка переходит сама в себя, при эллиптическом преобразовании то же имеет место по отношению к окружностям второго пучка, при локсодромическом преобразовании сама в себя переходит каждая из локсодром (рис. 41, *a*, *b*, *v*).

Рассмотрим теперь дробно-линейное преобразование с одной неподвижной точкой  $z_1$ , которое называется *параболическим*.

Для наглядности снова будем изображать  $z$  и  $w$  точками в одной плоскости. На вспомогательной плоскости будем изображать новые переменные

$$Z = \frac{1}{z - z_1} \equiv h(z), \quad W = \frac{1}{w - z_1} \equiv h(z). \quad (2.24)$$

Функция, устанавливающая зависимость между  $Z$  и  $W$ , имеет единственную бесконечно удаленную неподвижную точку, поэтому она имеет вид

$$W = Z + g. \quad (2.25)$$

Выполнив замену переменных (2.24), переходим к *нормальной форме* общего случая параболического преобразования

$$\frac{1}{w - w_1} = \frac{1}{z - z_1} + g, \quad (2.26)$$

имеющего неподвижную точку  $z = z_1$ . Так как в частном случае преобразования (2.25) сама в себя переходит каждая из прямых, параллельных вектору  $g$ , то в общем случае параболического преобразования (2.26), сама в себе будет переходить любая из окружностей, соответствующих при отображении  $h^{-1}$  указанным прямым. Будучи конформными образами пучка параллельных прямых, эти окружности имеют общую касательную в точке  $z = z_1$  (рис. 41, *г*).

При  $c \neq 0$  дробно-линейное преобразование (2.12) не является преобразованием подобия «в целом», и соотношение (2.6) уже не справедливо. Однако в общем случае дробно-линейного преобразования сохраняется *двойное отношение четырех точек*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \quad (2.27)$$

т. е. имеет место равенство

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4). \quad (2.28)$$

Это равенство легко проверить для функции  $w = \frac{1}{z}$ , для целой линейной функции оно верно согласно формуле (2.6), а потому вследствие формул (2.18) оно верно и для любой дробно-линейной функции.

Из равенства (2.28) следует, что существует дробно-линейная функция

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}, \quad (2.29)$$

которая переводит три данные точки  $z_1, z_2, z_3$  плоскости  $z$  в три заданные точки  $w_1, w_2, w_3$  плоскости  $w$ .

Легко показать, что функция (2.29) единственная дробно-линейная функция, переводящая точки  $z_1, z_2, z_3$  в точки  $w_1, w_2, w_3$ . Действительно, если существуют две такие функции  $S_1(z)$  и  $S_2(z)$ , то дробно-линейная функция  $S_2^{-1}S_1(z)$  оставляет неподвижными три точки  $z_1, z_2, z_3$ , а это возможно только тогда, когда  $S_2^{-1}S_1(z) \equiv z$ , т. е.  $S_2(z) = S_1(z)$ .

Отметим, что формула (2.29) сохраняет смысл и в том случае, когда одна из точек  $z_j$  или  $w_j$  есть бесконечно удаленная, если только в этой формуле заменить единицей разности, в которые входит бесконечно удаленная точка \*. Например, формула (2.7) — частный случай формулы (2.29) при  $z_3 = \infty$  и  $w_3 = \infty$ .

При помощи формулы (2.29) можно решить ряд важных задач на нахождение отображающих функций, которые в дальнейшем будут рассмотрены.

**23. Отображение окружности при заданных коэффициентах дробно-линейной функции.** Найдем уравнения для образов произвольной прямой

$$\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z) = p, \lambda = l + im \quad (2.30)$$

и произвольной окружности

$$|z - z_0| = r \quad (2.31)$$

при дробно-линейном преобразовании (2.12) с заданными коэффициентами  $a, b, c, d$ .

При отображении прямой  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z) = p$  надо в отдельности рассмотреть два случая:

1)  $p = -\operatorname{Re}\left(\bar{\lambda} \frac{d}{c}\right)$ . В этом случае прямая проходит через точку  $z = -\frac{d}{c}$ , которая отображается в бесконечно удаленную точку плоскости  $w$ . Образом рассматриваемой прямой является прямая, которая проходит через точку  $w = \frac{a}{c}$ , соответствующей бесконечно удаленной точке плоскости  $z$ . Для того чтобы найти ее уравнение, подставим в уравнение (2.30) вместо  $p$  его значение, а вместо  $z$  его выражение по формуле (2.13). Тогда

$$\operatorname{Re} \left[ \bar{\lambda} \frac{dw - b}{cw + a} + \bar{\lambda} \frac{d}{c} \right] = 0,$$

\* В этом легко убедиться, выполнив в формуле (2.29) предельный переход при  $z_j$  или  $w_j$ , стремящемся к бесконечности.

или

$$\operatorname{Re} \left[ \bar{\lambda} \frac{ad - bc}{c(a - cw)} \right] = 0.$$

Это уравнение можно записать иначе

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{c(-cw + a)}{\bar{\lambda}(ad - bc)} \right] = 0.$$

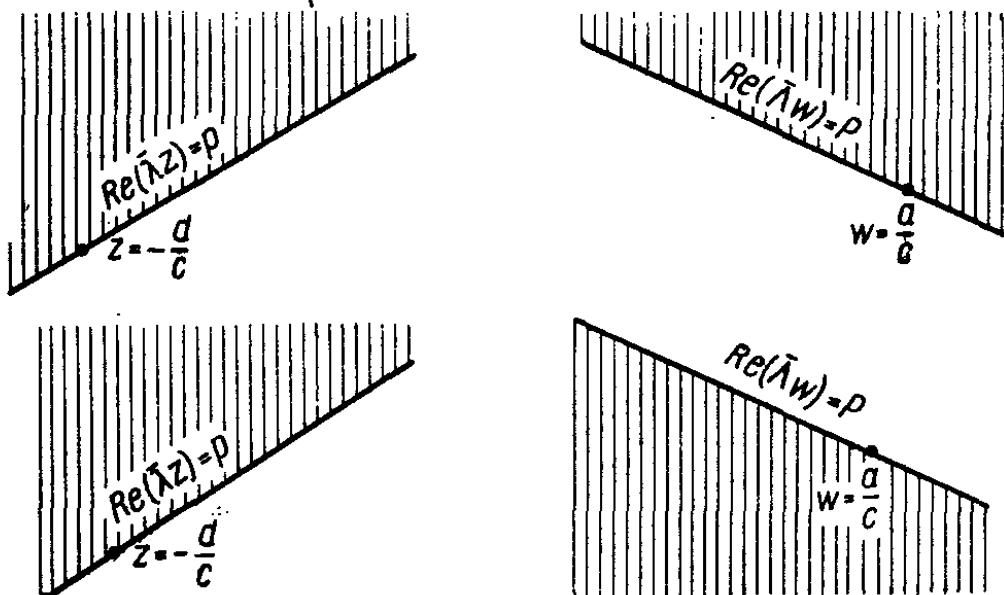


Рис. 42.

Выполнив элементарные преобразования, получим искомое уравнение

$$\operatorname{Re}(\bar{\lambda}w) = P, \quad (2.32)$$

где

$$\Lambda = \frac{ad - bc}{c^2} \bar{\lambda}, \quad P = \operatorname{Re} \left( \bar{\lambda} \frac{a}{c} \right). \quad (2.33)$$

Каждая из полуплоскостей, на которые прямая  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z) = p$  разбивает плоскость  $z$ , при дробно-линейном преобразовании (2.12) отображается в одну из полуплоскостей, имеющих границей прямую  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}w) = P$  (рис. 42);

2)  $p \neq -\operatorname{Re} \left( \bar{\lambda} \frac{d}{c} \right)$ . В данном случае прямая  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z) = p$  не проходит через точку  $z = -\frac{d}{c}$ . Образом этой прямой является окружность, проходящая через точку  $w = \frac{a}{c}$ . Для получения уравнения указанной окружности надо подставить в уравнение (2.30) вместо  $z$  его значение по формуле (2.13). Тогда получим уравнение

$$\operatorname{Re} \left( \bar{\lambda} \frac{dw - b}{-cw + a} \right) = p,$$

которое можно представить в виде

$$-p + \operatorname{Re} \left[ \bar{\lambda} \left( \frac{d}{-c} + \frac{bc - ad}{-c} \cdot \frac{1}{-cw + a} \right) \right] = 0.$$

Отсюда находим, что

$$2p|c|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\bar{c}d) = 2\operatorname{Re}\left[\bar{c}\bar{\lambda}(bc-ad)\frac{1}{cw-a}\right]$$

или

$$\begin{aligned} 2p|c|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\bar{c}d) &= (bc-ad)\bar{c}\bar{\lambda}\frac{1}{cw-a} + \\ &+ (\bar{b}\bar{c}-\bar{a}\bar{d})c\lambda\frac{1}{cw-a}. \end{aligned}$$

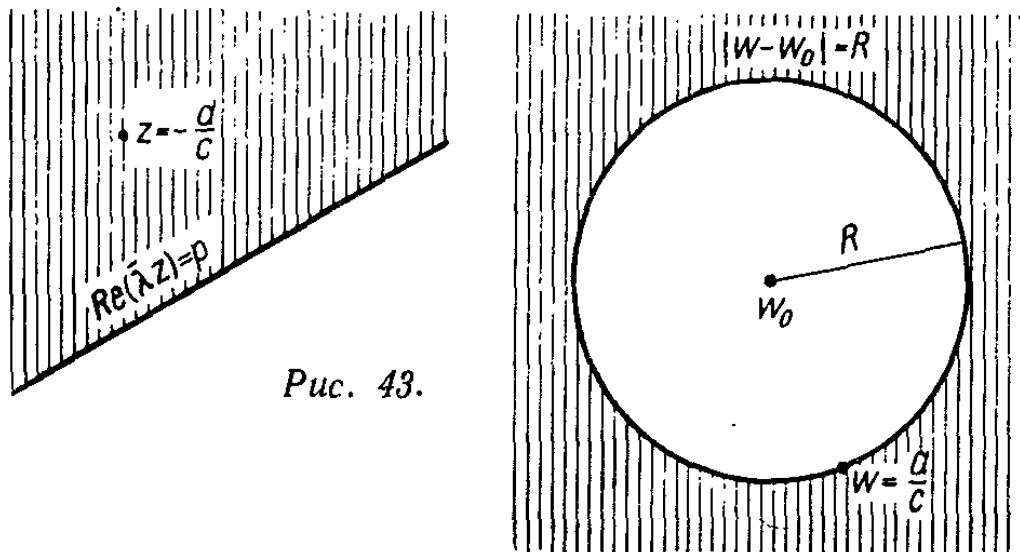


Рис. 43.

Разделив обе части уравнения на первое слагаемое, стоящее в его первой части, получим:

$$\frac{[2p|c|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\bar{c}d)](cw-a)}{(bc-ad)\bar{c}\bar{\lambda}} = 1 + \frac{(\bar{b}\bar{c}-\bar{a}\bar{d})c\lambda(cw-a)}{(bc-ad)\bar{c}\bar{\lambda}(cw-a)}.$$

От обеих частей уравнения вычтем единицу, а затем возьмем их по модулю. Тогда после некоторых преобразований получим искомое уравнение

$$|w-w_0|=R, \quad (2.34)$$

где

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{2ap\bar{\lambda} + ad\bar{\lambda} + b\bar{c}\bar{\lambda}}{2p|c|^2 + 2\operatorname{Re}(cd\bar{\lambda})}; \quad R = \left| \frac{(ad-bc)\lambda}{2p|c|^2 + 2\operatorname{Re}(cd\bar{\lambda})} \right| = \\ &= \left| \frac{a}{c} - w_0 \right|. \end{aligned} \quad (2.35)$$

При дробно-линейном преобразовании (2.12) внешность круга  $|w-w_0|>R$  отображается из двух полуплоскостей, ограниченных прямой  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z)=p$ , в которой лежит точка  $z=-\frac{a}{c}$  (рис. 43).

При дробно-линейном отображении окружности  $|z-z_0|=r$  также рассмотрим два случая:

1)  $r = |z_0 + \frac{d}{c}|$ , т. е. окружность проходит через точку  $z = -\frac{d}{c}$ .

Образом этой окружности будет прямая

$$\operatorname{Re}(\bar{\Lambda}\omega) = P, \quad (2.36)$$

не проходящая через точку  $\omega = \frac{a}{c}$ . Требуется определить  $\bar{\Lambda}$  и  $P$ .

Точки

$$z = z_0 + z_0 - \left(-\frac{d}{c}\right) = 2z_0 + \frac{d}{c},$$

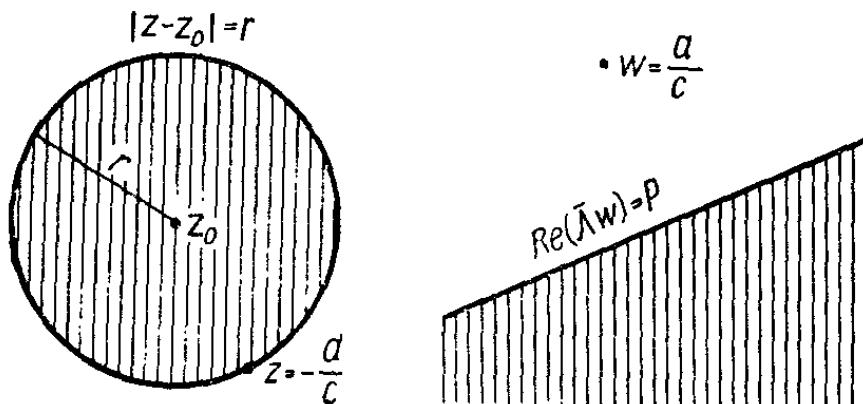


Рис. 44.

лежащей на окружности (2.31), при дробно-линейном преобразовании (2.12) соответствует точка

$$\omega = \frac{a\left(2z_0 + \frac{d}{c}\right) + b}{c\left(2z_0 + \frac{d}{c}\right) + d},$$

принадлежащая прямой (2.36). Отсюда получаем уравнение

$$\operatorname{Re}\left(\bar{\Lambda} \frac{a\left(2z_0 + \frac{d}{c}\right) + b}{c\left(2z_0 + \frac{d}{c}\right) + d}\right) = P$$

или

$$2P = \bar{\Lambda} \frac{a\left(2z_0 + \frac{d}{c}\right) + b}{c\left(2z_0 + \frac{d}{c}\right) + d} + \bar{\Lambda} \frac{\bar{a}\left(2\bar{z}_0 + \frac{\bar{d}}{\bar{c}}\right) + \bar{b}}{\bar{c}\left(2\bar{z}_0 + \frac{\bar{d}}{\bar{c}}\right) + \bar{d}} \quad (2.37)$$

с неизвестными величинами  $\bar{\Lambda}$  и  $P$ . Для получения второго уравнения с этими же неизвестными заметим, что при обратном отображении (2.13) образом прямой (2.36) является окружность (2.31), причем для определения центра этой окружности можно воспользоваться первой из формул (2.35), если в ней заменить  $\omega_0, \bar{\Lambda}, p, a, b, c, d$  соответственно на  $z_0, \bar{\Lambda}, P, d, -b, -c, a$ . Следовательно, вторым уравнением будет

$$z_0 = \frac{-2Pdc\bar{c} + d\bar{a}\bar{\Lambda} + b\bar{c}\bar{\Lambda}}{2P|c|^2 - c\bar{a}\bar{\Lambda} - \bar{c}a\bar{\Lambda}}.$$

Подставляя вместо  $2P$  его значение по формуле (2.37), получим уравнение, из которого затем найдем

$$\frac{\Lambda}{\bar{\Lambda}} = \frac{bc - ad}{c(cz_0 + d)} : \frac{\bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{d}}{\bar{c}(\bar{c}\bar{z}_0 + \bar{d})}.$$

За величину  $\Lambda$  можно взять

$$\Lambda = -\frac{h}{c(cz_0 + d)}, \quad (2.38)$$

где  $h = ad - bc$ .

Подставив в уравнение (2.37) вместо  $\Lambda$  его значение, после некоторых преобразований получим

$$P = \frac{-|h|^2 - 2 \operatorname{Re} \{c(az_0 + b)\bar{h}\}}{2|c(cz_0 + d)|^2}. \quad (2.39)$$

При дробно-линейном преобразовании (2.12) внутренность круга  $|z - z_0| \leq |z_0 + \frac{d}{c}|$  отображается на ту из двух полуплоскостей, ограниченных прямой (2.36), которая не содержит точки  $w = \frac{a}{c}$  (рис. 44);

2)  $r \neq \left|z_0 + \frac{d}{c}\right|$ , т. е. окружность не проходит через точку  $z = -\frac{d}{c}$ . Образом этой окружности будет окружность

$$|w - w_0| = R, \quad (2.40)$$

которая не проходит через точку  $w = \frac{a}{c}$ . Надо определить  $w_0$  и  $R$ .

Заменим отображение (2.12) двумя последовательными дробно-линейными преобразованиями

$$\zeta = \frac{1}{z - (z_0 + r)} \quad (2.41)$$

$$w = \frac{a_2\zeta + b_2}{c_2\zeta + d_2}. \quad (2.42)$$

Так как коэффициенты первого из них известны, то коэффициенты второго определяются по заданным коэффициентам отображения (2.12). Подставив, согласно (2.41), в систему уравнений (2.16)  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 1$ ,

$c_1 = 1$ ,  $d_1 = -(z_0 + r)$ , найдем

$$\begin{aligned} a_2 &= a(z_0 + r) + b; \\ b_2 &= a; \\ c_2 &= c(z_0 + r) + d; \\ d_2 &= c. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Преобразование (2.41) переводит окружность  $|z - z_0| = r$  в прямую  $\operatorname{Re}(\bar{\Lambda}\zeta) = P$ . Для определения  $\Lambda$  и  $P$  воспользуемся формулами (2.38) и (2.39), положив в них  $a = a_1 = 0$ ,  $b = b_1 = 1$ ,  $c = c_1 = 1$ ,

$d = d_1 = -(z_0 + r)$ . Тогда

$$\Lambda = -\frac{1}{r},$$

$$P = \frac{1}{2r^2}.$$

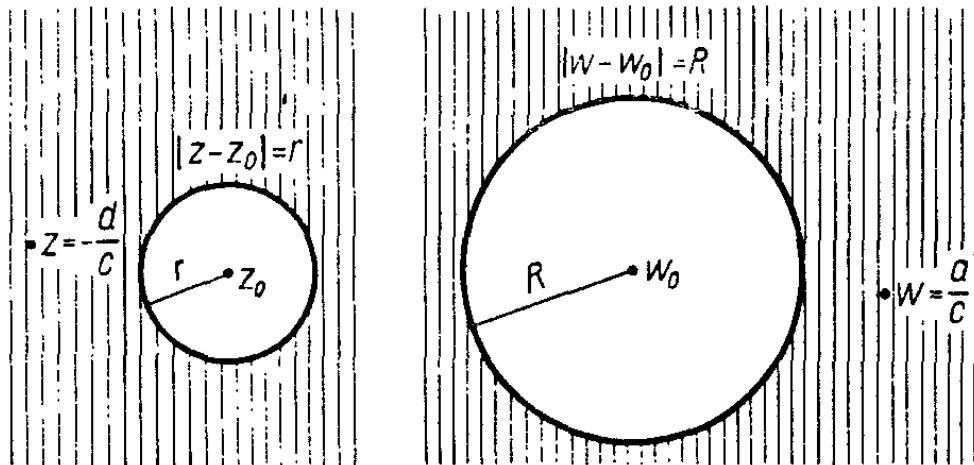


Рис. 45.

Преобразование (2.42) переводит прямую  $\operatorname{Re}(\bar{\Lambda}\zeta) = P$  в окружность  $|w - w_0| = R$ , где, согласно формулам (2.35),

$$w_0 = \frac{2a_2\bar{c}_2P + a_2\bar{d}_2\Lambda + b_2\bar{c}_2\bar{\Lambda}}{2P|c_2|^2 + 2\operatorname{Re}(c_2\bar{d}_2\Lambda)},$$

$$R = \left| \frac{(a_2d_2 - b_2c_2)\Lambda}{2P|c_2|^2 + 2\operatorname{Re}(c_2\bar{d}_2\Lambda)} \right|.$$

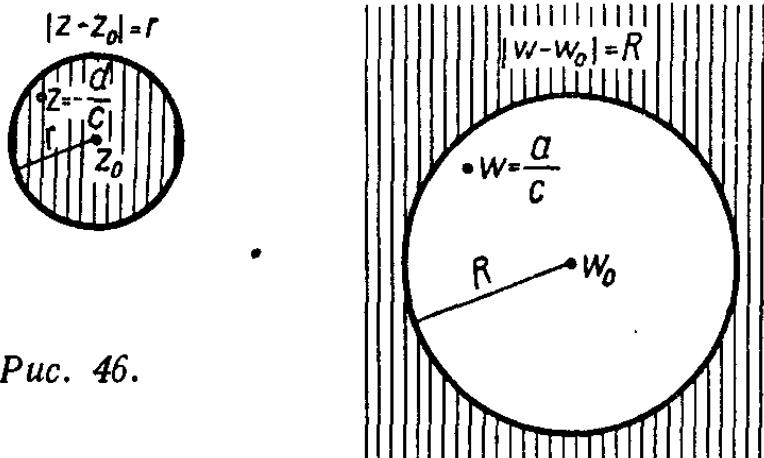


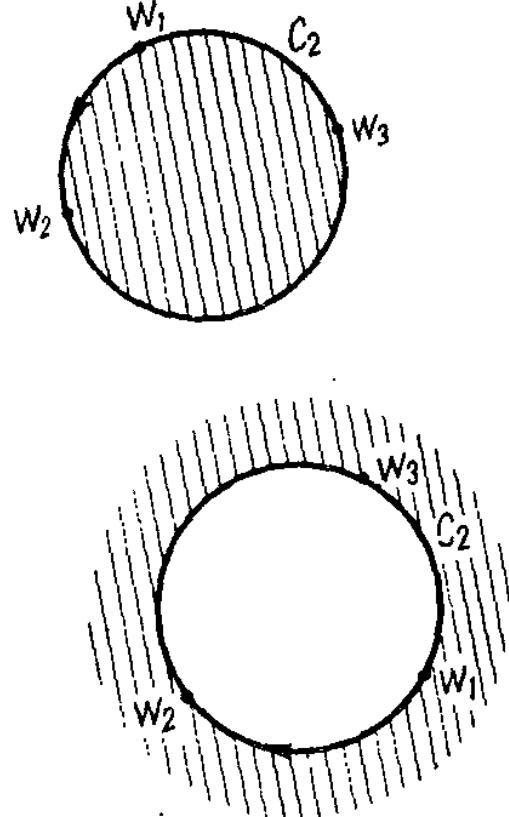
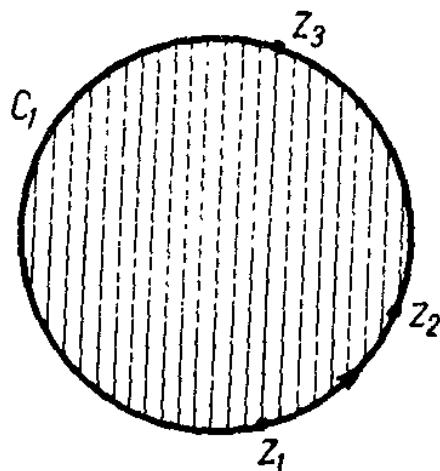
Рис. 46.

Подставив вместо  $a_2, b_2, c_2, d_2$  их значения (2.43), а вместо  $\Lambda$  и  $P$  их значения (2.44) и (2.45), окончательно найдем

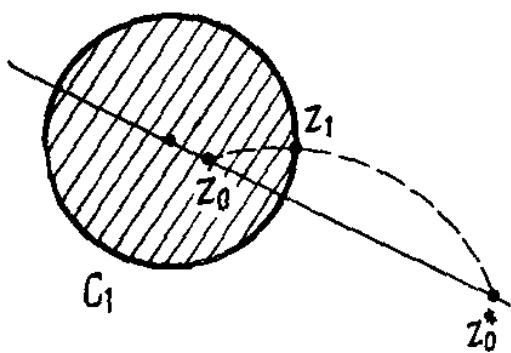
$$w_0 = \frac{(az_0 + b)(\bar{c}\bar{z}_0 + \bar{d}) - ac\bar{r}^2}{|cz_0 + d|^2 - |c|^2 r^2}, \quad (2.46)$$

$$R = \frac{r|ad - bc|}{||cz_0 + d|^2 - |c|^2 r^2|.} \quad (2.47)$$

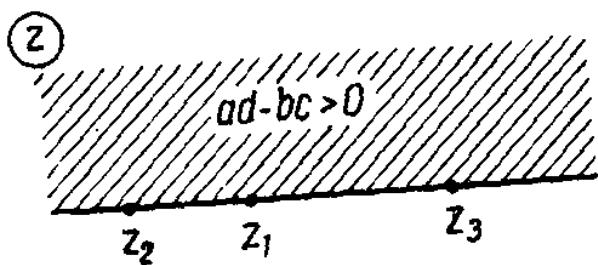
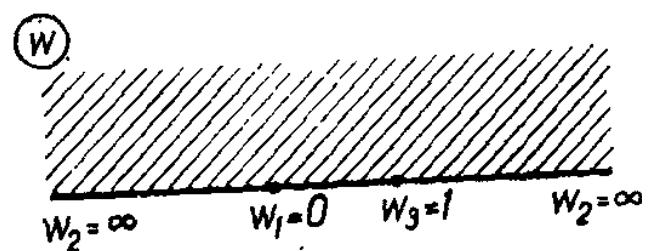
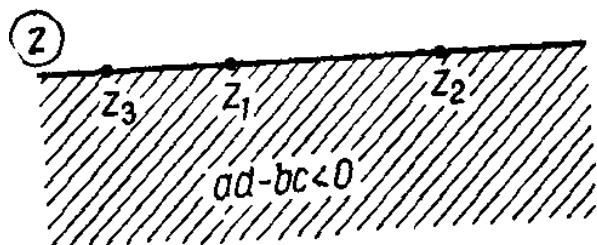
Если  $|cz_0 + d| > |c|r$ , то точка  $z = -\frac{d}{c}$ , являющаяся прообразом бесконечно удаленной точки плоскости  $w$ , находится в области  $|z - z_0| > r$ . Поэтому при отображении (2.12) внешность



Puc. 47.



Puc. 48.



Puc. 49.

круга  $|z - z_0| \geq r$  перейдет вовнешность круга  $|w - w_0| \geq R$  (рис. 45).

При  $|cz_0 + d| < |c|r$  точка  $z = -\frac{d}{c}$  лежит внутри круга  $|z - z_0| < r$ . Следовательно, при отображении (2.12) внутренность этого круга переходит во внешность круга  $|z - z_0| > R$  (рис. 46).

**24. Отображение данной окружности на заданную окружность.** Пусть в плоскостях  $z$  и  $w$  заданы соответственно некоторые окружности  $C_1$  и  $C_2$ . Легко найти дробно-линейную функцию, отображающую одну из окружностей на другую. При этом надо только потребовать, чтобы три произвольные точки  $z_1, z_2, z_3$  окружности  $C_1$  перешли в три заданные точки  $w_1, w_2, w_3$  окружности  $C_2$ . Тогда, согласно (2.29), искомую функцию можно взять в виде

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (2.48)$$

Действительно, эта функция переводит точки  $z_1, z_2, z_3$  окружности  $C_1$  в точки  $w_1, w_2, w_3$  окружности  $C_2$ . Поскольку она, как и любая дробно-линейная функция, обладает круговым свойством (окружность переводит снова в окружность), то окружность  $C_1$  должна перейти в окружность  $C_2$ . Так как окружность делит плоскость на две области, то, согласно принципу соответствия границ, каждая из областей, ограниченных окружностью  $C_1$ , конформно и взаимно однозначно отобразится на одну из двух областей, имеющих границей окружность  $C_2$ ; причем область, расположенная слева от точки  $z$ , движущейся по дуге  $z_1 z_2 z_3$ , перейдет в область, расположенную также слева при движении точки  $w$  по дуге  $w_1 w_2 w_3$ , если смотреть в сторону движения точек  $z$  и  $w$ . На рис. 47 дается геометрическая интерпретация для случая, когда обе окружности имеют конечный радиус, т. е. ни одна из них не является прямой. В этом случае функция (2.48) реализует взаимно однозначное и конформное отображение внутренности окружности  $C_1$  либо на внутренность окружности  $C_2$ , либо на ее внешность в зависимости от порядка, в котором расположены точки  $w_1, w_2, w_3$ .

При нахождении отображающих функций часто встречаются случаи, когда точки задаются внутри круга.

Потребуем, чтобы при дробно-линейном преобразовании внутренность одной окружности  $C_1$  отобразилась на внутренность другой окружности  $C_2$  и данная внутренняя точка  $z_0$  перешла в данную внутреннюю точку  $w_0$  (рис. 48). Тогда точка  $z_0^*$ , симметричная точке  $z_0$  относительно окружности  $C_1$ , должна перейти в точку  $w_0^*$ , симметричную точке  $w_0$ , относительно окружности  $C_2$ . Каждая пара точек на плоскости определяет пучок окружностей, относительно которых эти точки являются симметричными\*. Парам точек  $z_0, z_0^*$  и  $w_0, w_0^*$  соответствуют два пучка окружностей, к которым принадлежат и данные окружности  $C_1$  и  $C_2$ . Зададим на окружностях  $C_1$  и  $C_2$  еще по одной точке  $z_1$  и  $w_1$  и потребуем, чтобы эти точки соответствовали одна другой при отобра-

\* Это очевидно для пары точек  $z = 0$  и  $z = \infty$ , которые, будучи симметричными относительно любой окружности с центром в начале координат, определяют пучок концентрических окружностей. При помощи дробно-линейного преобразования точки  $z = 0$  и  $z = \infty$  можно перевести в любую пару точек; при этом пучок концентрических окружностей перейдет в некоторый другой пучок.

жении. Тогда точки  $z_0$ ,  $z_0^*$ ,  $z_1$  и  $w_0$ ,  $w_0^*$ ,  $w_1$  определят однозначно как окружности  $C_1$  и  $C_2$ , так и функцию, отображающую одну из указанных окружностей на другую. Эту функцию, согласно (2.29), можно записать в виде

$$\frac{w - w_0}{w - w_0^*} \cdot \frac{w_1 - w_0^*}{w_1 - w_0} = \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \cdot \frac{z_1 - z_0^*}{z_1 - z_0}. \quad (2.49)$$

Приведем примеры решения типичных задач на отыскание отображающих функций.

1. Отображение данной прямой  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z - p) = 0$  на заданную прямую  $\operatorname{Re}(\bar{\Lambda}w - P) = 0$ .

Рассмотрим вначале частный случай: требуется найти функцию, отображающую действительную ось  $\operatorname{Im} z = 0$  на действительную ось  $\operatorname{Im} w = 0$ . Пусть при отображении точки  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  перейдут соответственно в точки  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = \infty$ ,  $w_3 = 1$  (рис. 49). Согласно (2.48), искомая функция будет

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Обозначив

$z_3 - z_2 = a$ ;  $-z_1(z_3 - z_2) = b$ ;  $z_3 - z_1 = c$ ;  $-z_2(z_3 - z_1) = d$ , запишем эту функцию в виде

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.50)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  — действительные числа.

Легко найти условие, которому должны удовлетворять коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , чтобы верхняя полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  отображалась в верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ . Действительно, производя

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

для действительных значений  $z$  принимает положительные значения при выполнении условия

$$ad - bc > 0.$$

Следовательно, при выполнении этого же условия верхняя полуплоскость плоскости  $z$  отобразится в верхнюю полуплоскость плоскости  $w$ . Если  $ad - bc < 0$ , то при отображении в верхнюю полуплоскость перейдет нижняя полуплоскость.

Перейдем теперь к общему случаю. Так как функция (2.50) отображает действительную ось на действительную ось, а преобразование

$$w = i(\bar{\lambda}z - p) \quad (2.51)$$

переводит прямую  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z - p) = 0$  в действительную ось  $\operatorname{Im} w = 0$ , то для получения функции, отображающей прямую  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z - p) = 0$  на прямую  $\operatorname{Re}(\bar{\Lambda}w - P) = 0$ , надо в формуле (2.50) заменить  $z$  и  $w$  соответственно на  $i(\bar{\lambda}z - p)$  и  $i(\bar{\Lambda}w - P)$ . Тогда искомую функцию можно записать в виде

$$\bar{\Lambda}w - P = \frac{a(\bar{\lambda}z - p) - ib}{ic(\bar{\lambda}z - p) + d}, \quad (2.52)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  — действительные числа.

Каждая из полуплоскостей, ограниченных прямой  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z) = p$ , перейдет при отображении (2.52) в одну из полуплоскостей, ограниченных прямой  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}w) = P$  (рис. 50).

Если изображать  $z$  и  $w$  точками в одной плоскости, то при  $\bar{\lambda} = \bar{\Lambda}$ ,  $p = P$  функции (2.52) отображает прямую  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z) = p$  на себя, причем, как и для случая действительной прямой при  $ad - bc > 0$ , каждая из полуплоскостей, ограниченных прямой  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z) = p$ , отобразится на себя, когда  $ad - bc < 0$ , то эти полуплоскости отобразятся одна в другую.

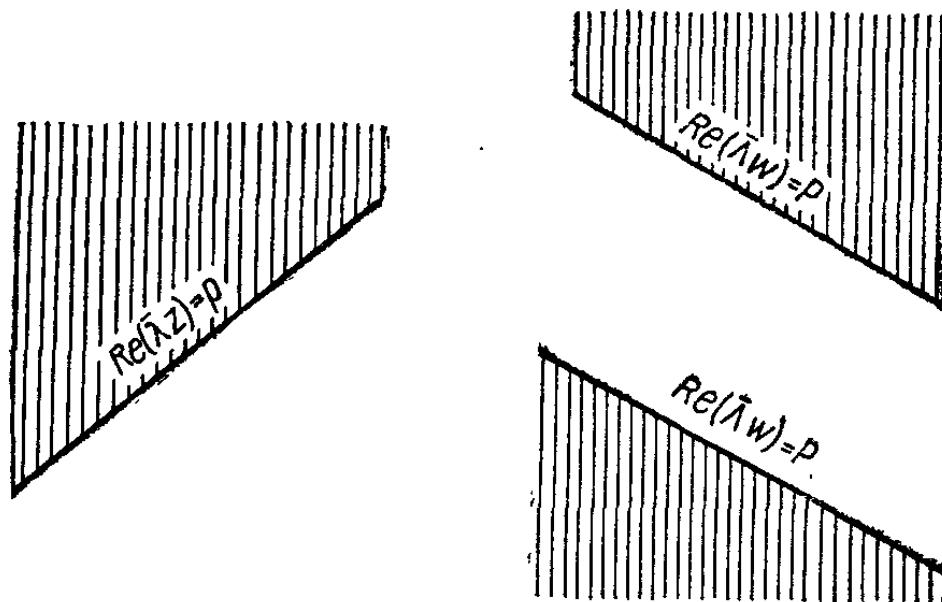


Рис. 50.

2. Отображение данной прямой  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z) = p$  на заданную окружность  $|w - w_0| = R$ .

Как и в предыдущем пункте, рассмотрим вначале частный случай. Надо найти функцию, реализующую конформное отображение верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на единичный круг  $|w| < 1$ , причем заданная точка верхней полуплоскости  $z = z_0$  должна перейти в центр круга  $w = 0$ . Потребуем еще, чтобы точка действительной оси  $z = z_1$  перешла в точку единичной окружности  $w = 1$  (рис. 51). Тогда, согласно (2.49), отображающая функция запишется в виде:

$$w = \frac{z - z_0}{z - z_1} \cdot \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Так как модуль второго сомножителя равен единице, то можно положить

$$\frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{i\tau}.$$

Поэтому

$$w = e^{i\tau} \frac{z - z_0}{z - z_1}. \quad (2.53)$$

Для того чтобы перейти к общему случаю отображения прямой  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z - p) = 0$  на окружность  $|w - w_0| = R$ , заметим вначале, что преобразование

$$w = \frac{z - z_0}{R} \quad (2.54)$$

переводит окружность  $|\zeta - \zeta_0| = R$  в единичную окружность  $|w| = 1$ . Тогда, согласно формулам (2.51), (2.53) и (2.54), функция, отображающая прямую  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z) = p$  на окружность  $|w - w_0| = R$ , будет иметь вид

$$\frac{w - w_0}{R} = e^{i\tau} \frac{i(\bar{\lambda}z - p) - z_0}{i(\bar{\lambda}z - p) - \bar{z}_0}.$$

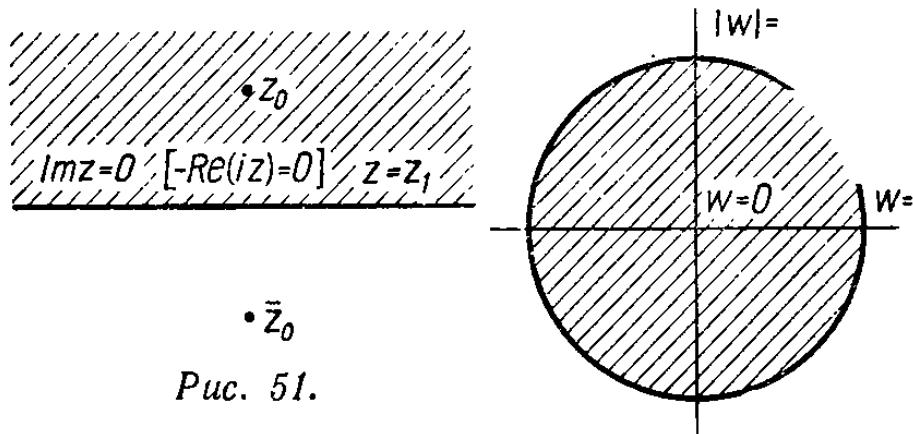


Рис. 51.

Умножив обе части уравнения на  $R$ , затем числитель и знаменатель правой части на  $-i$  и обозначив  $iz_0 = \beta$ , получим окончательно

$$w - w_0 = Re^{i\tau} \frac{\bar{\lambda}z - p + \beta}{\bar{\lambda}z - p - \bar{\beta}}, \quad (2.55)$$

где  $\operatorname{Re}(\beta) \neq 0$ .

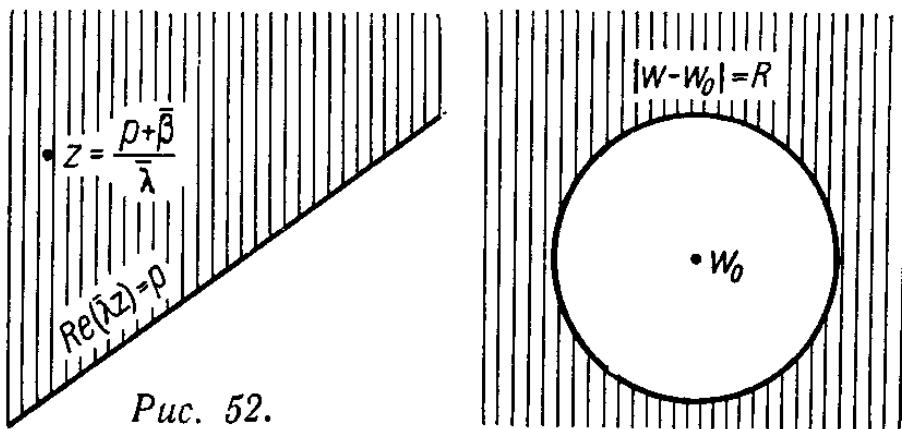


Рис. 52.

При отображении (2.55) на внешность круга  $|w - w_0| > R$  перейдет из полуплоскостей, ограниченных прямой  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}z) = p$ , которая содержит точку  $z = \frac{p + \bar{\beta}}{\bar{\lambda}}$  (рис. 52).

3. Отображение данного круга  $|z - z_0| \leq r$  на заданный круг  $|w - w_0| \leq R$ .

Найдем сначала функцию, отображающую единичный круг  $|z| \leq 1$  на единичный круг  $|w| \leq 1$  и переводящую данную точку  $z = \alpha$  в точку  $w = 0$ . Точка  $\frac{1}{\alpha}$  должна перейти в точку  $w = \infty$ . Потребуем еще

чтобы произвольная точка окружности  $z = e^{i\varphi}$  перешла в точку  $w = 1$  (рис. 53). Согласно (2.49), отображающая функция будет

$$w = \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} \cdot \frac{e^{i\varphi} - \frac{1}{\bar{\alpha}}}{e^{i\varphi} - \alpha}$$

или

$$w = \frac{z - \alpha}{az - 1} \cdot \frac{\bar{\alpha}e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - \alpha}.$$

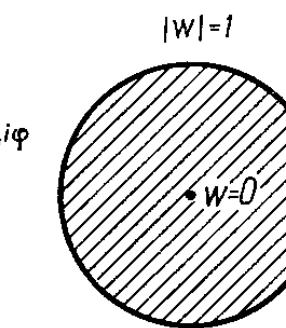
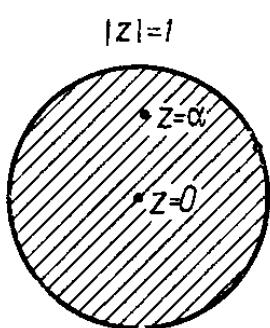
Так как

$$|\bar{\alpha}e^{i\varphi} - 1| = |\alpha e^{-i\varphi} - 1| = |\alpha e^{-i\varphi} - 1| |e^{i\varphi}| = |\alpha - e^{i\varphi}|,$$

то можно обозначить

$$\frac{\bar{\alpha}e^{i\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - \alpha} = e^{i\tau}.$$

$$\bullet z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$$



$$\bullet z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$$

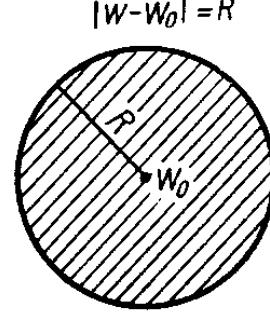
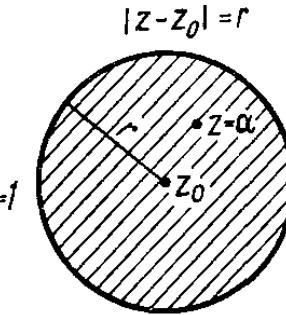


Рис. 53.

Рис. 54.

Следовательно, искомую функцию можно представить в виде

$$\bullet w = e^{i\tau} \frac{z - \alpha}{az - 1}. \quad (2.56)$$

Чтобы получить функцию, отображающую круг  $|z - z_0| \leq r$  на круг  $|w - w_0| \leq R$  и переводящую фиксированную точку  $z = \alpha$  первого круга в центр второго круга (рис. 54), достаточно воспользоваться формулами (2.54) и (2.56). Согласно этим формулам, искомая функция будет

$$\frac{w - w_0}{R} = e^{i\tau} \frac{\frac{z - z_0}{r} - \alpha}{\bar{\alpha} \left( \frac{z - z_0}{r} \right) - 1}.$$

Выполнив очевидные преобразования, получим окончательно

$$w - w_0 = Re^{i\tau} \frac{z - z_0 - \alpha r}{az - \bar{\alpha}z_0 - r}. \quad (2.57)$$

Тем самым рассмотрены все возможные случаи отображения окружности на окружность.

**25. Отображение двух окружностей на две окружности.** При решении задачи отображения двух окружностей на две окружности надо учитывать, что две произвольные окружности принадлежат некоторому пучку окружностей. Существует также еще пучок окружностей, которые образуют с окружностями ранее указанного пучка ортогональную сетку. Все окружности одного из пучков пересекаются в двух точках  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , которые называются узлами соответствующей сетки. При этом надо различать три случая.

1. Данные окружности  $C_1$  и  $C_2$  пересекаются в двух точках  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ . Эти окружности в совокупности со всеми остальными окружностями,

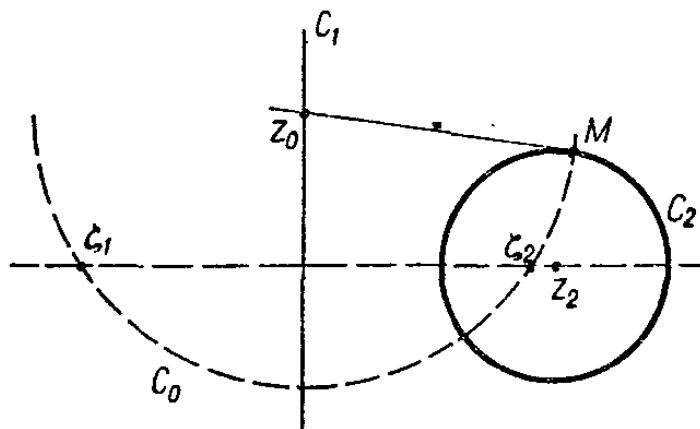


Рис. 55.

проходящими через точки  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , образуют пучок, который называется **эллиптическим пучком**. Преобразование

$$w = \frac{z - \zeta_1}{z - \zeta_2} \quad (2.58)$$

переводит указанный пучок в пучок прямых, проходящих через начало координат.

2. Окружности  $C_1$  и  $C_2$  не имеют общих точек. В данном случае окружности  $C_1$  и  $C_2$  являются ортогональными

к окружностям некоторого эллиптического пучка и в совокупности со всеми остальными окружностями, обладающими этим же свойством, образуют пучок, который называется **гиперболическим пучком**. Для того чтобы найти узлы  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  соответствующей сетки, достаточно провести любые две окружности, принадлежащие эллиптическому пучку; точки их пересечения и будут искомыми узлами.

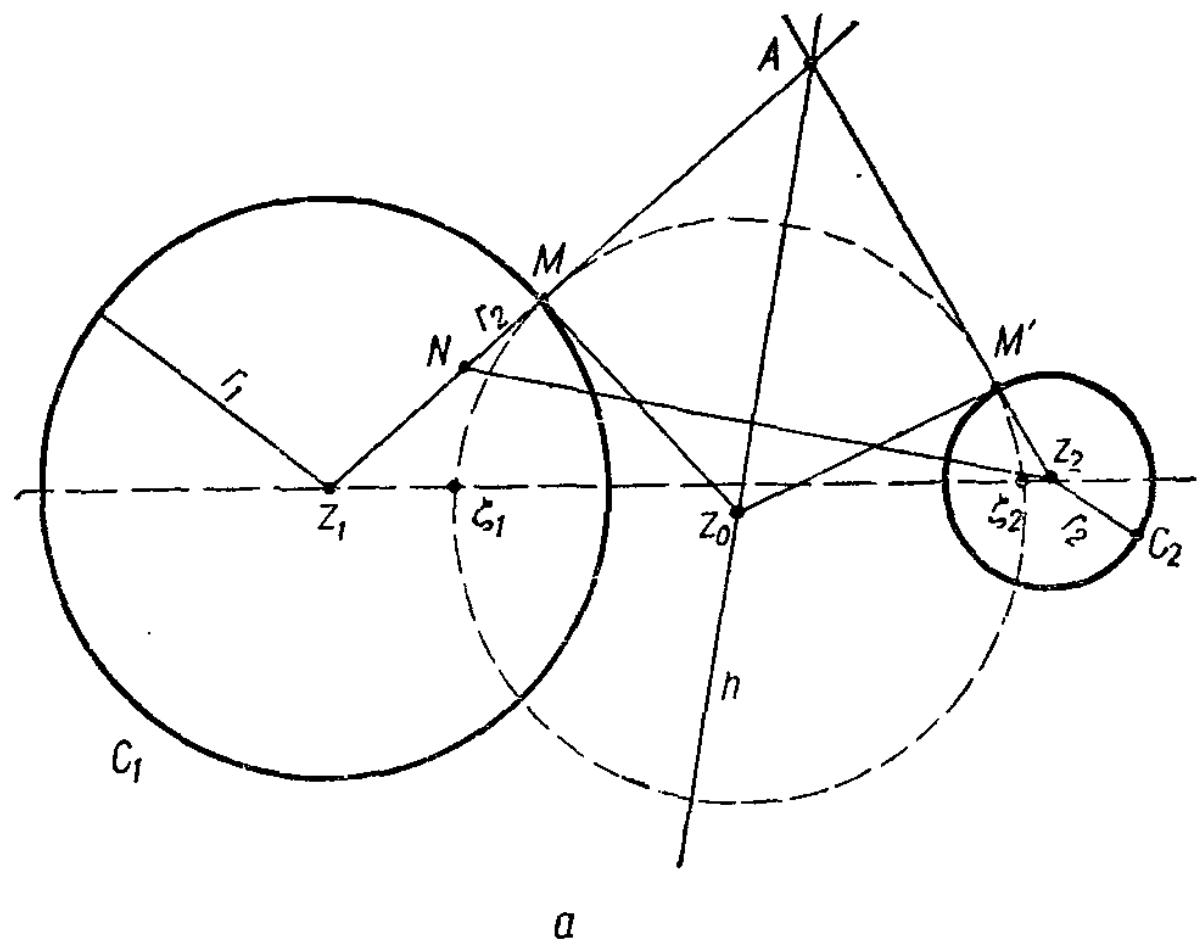
Укажем способ геометрического построения окружности  $C_0$ , ортогональной к окружностям  $C_1$  и  $C_2$  и проходящей через заданную точку  $M$  одной из них. Если одна из окружностей, например  $C_1$ , является прямой, то, проведя касательную в точке  $M$  к  $C_2$  до пересечения с прямой  $C_1$ , найдем центр  $z_0$  искомой окружности  $C_0$  (рис. 55). Если ни одна из окружностей  $C_1$  и  $C_2$  не является прямой, то построение окружности  $C_0$  можно выполнить следующим образом (рис. 56, а, б). Проведем прямую через центр  $z_1$  окружности  $C_1$  и точку  $M$  этой окружности, а затем на прямой  $z_1M$  отложим в любую сторону отрезок  $MN$ , равный радиусу  $r_2$  окружности  $C_2$ . Далее, восстанавливаем перпендикуляр  $h$  из середины отрезка, соединяющего точку  $N$  с центром  $z_2$  окружности  $C_2$ . Центр  $z_0$  искомой окружности есть точка пересечения касательной к  $C_1$  в точке  $M$  и перпендикуляра  $h$ . Действительно, так как  $AN = Az_2$  ( $A$  — точка пересечения \* прямой  $MN$  и перпендикуляра  $h$ ), то  $AM = AM'$  ( $M'$  — точка пересечения прямой  $Az_2$  с окружностью  $C_2$ ). Следовательно,  $z_0M = z_0M'$  и  $z_0M'$  ортогонально  $Az_2$ .

Узлы  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  являются точками пересечения окружности  $C_0$  и линии центров \*\*  $z_1z_2$ , которая тоже является «окружностью», ортогональной к  $C_1$  и  $C_2$ .

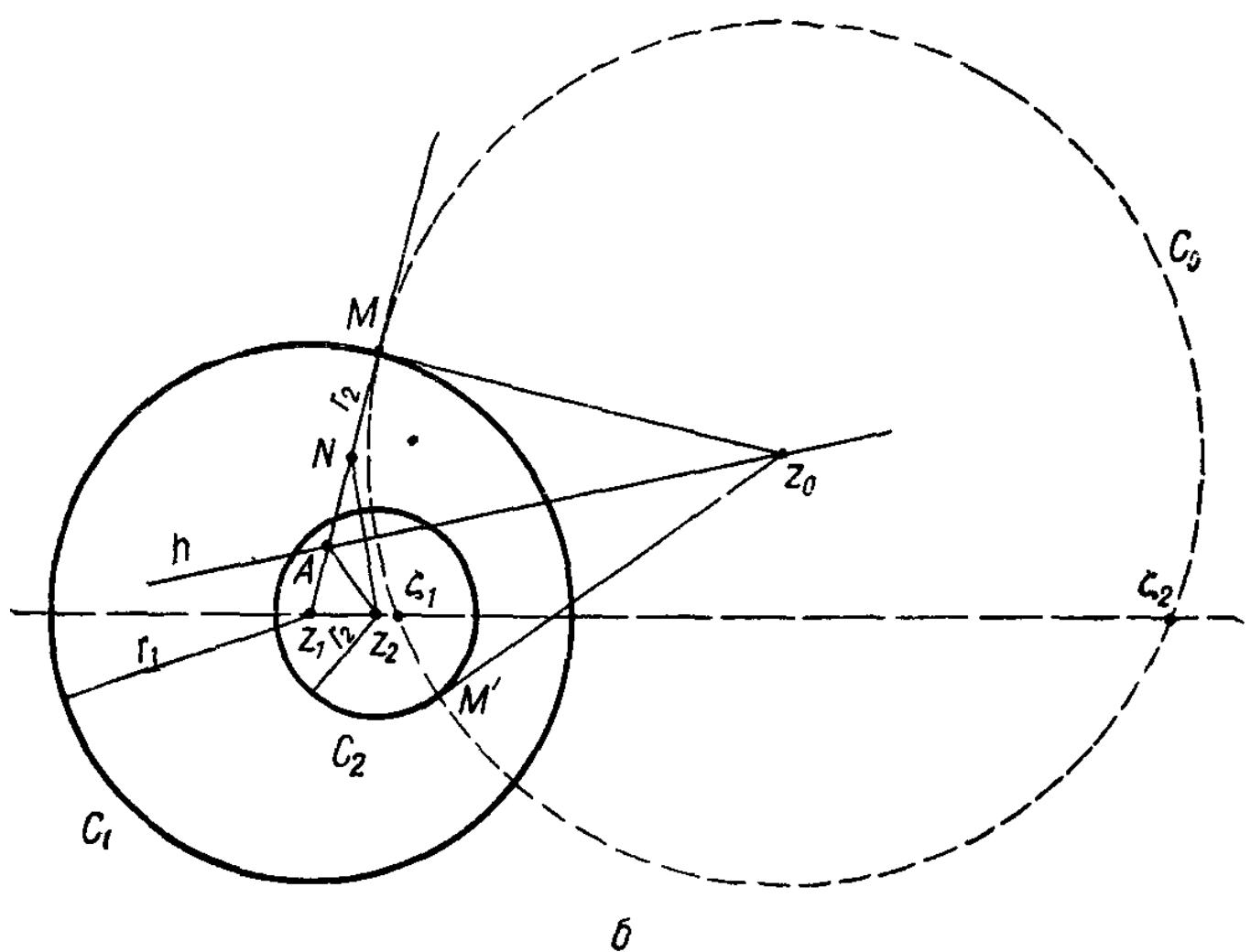
Отображение (2.58) переводит  $C_1$  и  $C_2$  в концентрические окружности с центром в начале координат.

\* Предполагается, что прямая  $MN$  не параллельна  $h$ . Однако указанное выше построение верно и в этом случае.

\*\* Если одна из окружностей (например,  $C_1$ ) — прямая, то роль линии центров играет перпендикуляр, опущенный из центра  $z_2$  окружности  $C_2$  на  $C_1$  (см. рис. 55).



*a*



*b*

Рис. 56.

3. Окружности  $C_1$  и  $C_2$  соприкасаются в точке  $\zeta$ . Эти окружности в совокупности со всеми остальными окружностями, касающимися одна другой в одной и той же точке  $\zeta$ , образуют так называемый *параболический пучок*. При отображении

$$w = \frac{1}{z - \zeta} \quad (2.59)$$

этот пучок преобразуется в пучок параллельных прямых.

Легко указать преобразование, переводящее две данные окружности  $C_1$  и  $C_2$  в себя. Это будет дробно-линейное преобразование соответствующего типа (гиперболического, эллиптического или параболического), неподвижными точками которого являются узлы  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ ; причем

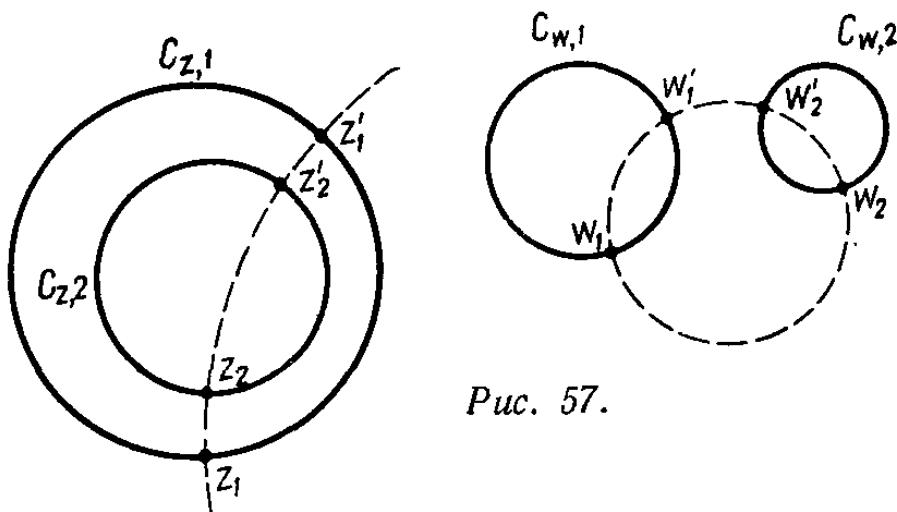


Рис. 57.

можно всегда добиться того, чтобы любые две окружности, ортогональные к  $C_1$  и  $C_2$ , переходили при отображении одна в другую.

Рассмотрим теперь общий случай отображения двух окружностей  $C_{z,1}$ ,  $C_{z,2}$  из две окружности  $C_{w,1}$ ,  $C_{w,2}$  и выясним, при каком условии это отображение возможно осуществить. Проведем к каждой из пар окружностей какие-либо ортогональные им окружности и потребуем, чтобы при отображении они переходили одна в другую. Тогда точки пересечения  $z_1$ ,  $z'_1$ ,  $z_2$ ,  $z'_2$  должны перейти соответственно в точки  $w_1$ ,  $w'_1$ ,  $w_2$ ,  $w'_2$  (рис. 57).

Наоборот, если взять дробно-линейную функцию, переводящую точки  $z_1$ ,  $z'_1$ ,  $z_2$ ,  $z'_2$  соответственно в точки  $w_1$ ,  $w'_1$ ,  $w_2$ ,  $w'_2$ , то она отобразит окружности  $C_{z,1}$ ,  $C_{z,2}$  и ортогональную им окружность в окружности  $C_{w,1}$ ,  $C_{w,2}$  и ортогональную им окружность. Однако это возможно только тогда, когда двойные отношения четырех точек равны.

Если обозначить

$$\Delta(C_{z,1}, C_{z,2}) = \frac{z_1 - z_2}{z'_1 - z'_2} : \frac{z_1 - z'_2}{z'_1 - z_2},$$

то две пары окружностей можно коiformно отобразить одну на другую при выполнении равенства

$$\Delta(C_{z,1}, C_{z,2}) = \Delta(C_{w,1}, C_{w,2}). \quad (2.60)$$

## § 2. Показательная и логарифмическая функции

26. Функция  $w = e^z$ . Определенная в п. 6 показательная функция:

$$w = e^z \quad (2.61)$$

обладает периодом  $2\pi i$ . Поэтому при изучении отображения, осуществляемого показательной функцией, достаточно рассмотреть только отображение бесконечной полосы

$$-\infty < x \leq +\infty, -\pi \leq y \leq \pi,$$

в которой было определено главное значение логарифма \*.

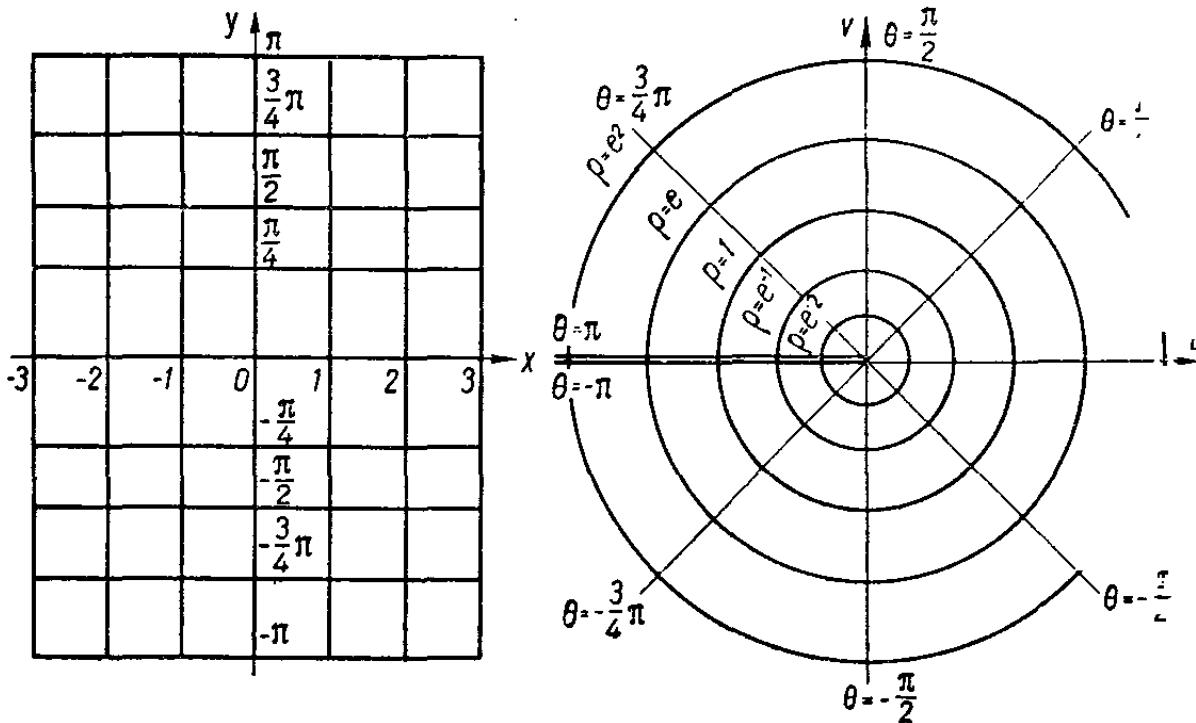


Рис. 58.

Введем в плоскости  $z$  декартовы координаты  $z = x + iy$ , а в плоскости  $w$  полярные координаты  $w = \rho e^{i\theta}$ . Тогда, согласно (2.61), получим

$$\rho = e^x, \quad 0 = y. \quad (2.62)$$

Из равенств (2.62) следует, что функция  $w = e^z$  отображает декартову сетку плоскости  $z$  в полярную сетку плоскости  $w$  (рис. 58), т. е. прямые  $y = \text{const}$ , параллельные действительной оси, переходят при отображении в лучи  $\theta = \text{const}$ , выходящие из начала координат, а отрезки прямых  $x = \text{const}$ ,  $-\pi \leq y \leq +\pi$  преобразуются в окружности  $\rho = e^x = \text{const}$ . В частности, вся действительная ось  $y = 0$ ,  $-\infty < x < +\infty$  отобразится в луч  $\theta = 0$ , т. е. в действительную полуось  $v = 0$ ,  $0 \leq u \leq +\infty$  плоскости  $w$ . Прямые  $y = +\pi$  и  $y = -\pi$  отобразятся в совпадающие между собой лучи  $\theta = +\pi$  и  $\theta = -\pi$ . Поэтому для сохранения однозначности отображения необходимо разъединить лучи  $\theta = +\pi$  и  $\theta = -\pi$ , сделав в плоскости  $w$  разрез от  $w = 0$  до  $w = -\infty$ ; причем прямой  $y = +\pi$  будет соответствовать верхний берег разреза, а прямой  $y = -\pi$  — его нижний берег.

\* Можно провести рассуждения, аналогичные приведенным ниже, для любой бесконечной полосы

$$-\infty < x \leq +\infty, \quad y_1 \leq y \leq y_1 + 2\pi.$$

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2$$

(2.63)

отобразится в кольцевой сектор

$$e^{x_1} \leq \rho \leq e^{x_2}, \quad y_1 \leq \theta \leq y_2.$$

В неравенствах (2.63) и (2.64)  $x_1$  и  $x_2$ , а также  $y_1$  и  $y_2$  могут изменяться в пределах рассматриваемой нами полосы. Например, прямоугольник  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$  перейдет в полукольцо  $1 \leq \rho \leq e, 0 \leq \theta \leq \pi$ , а прямоугольник  $0 \leq x \leq 1, -\pi \leq y \leq \pi$  перейдет в кольцо  $1 \leq \rho \leq e$ ,

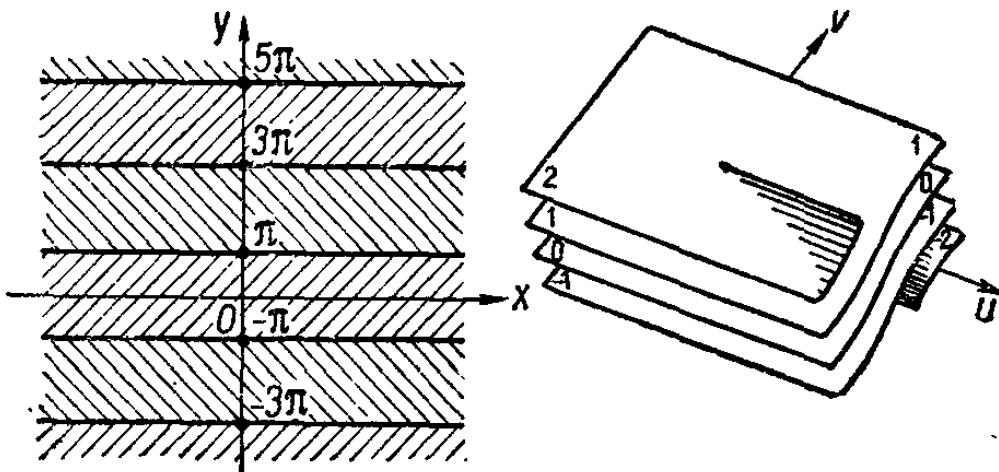


Рис. 59.

$-\pi \leq \theta \leq \pi$  с разрезом вдоль действительной оси от  $-1$  до  $-e$ . Положительная полуполоса  $0 \leq x \leq +\infty, 0 \leq y \leq \pi$  отобразится в верхнюю полуплоскость с вырезанным полукругом  $\rho < 1, 0 \leq \theta \leq \pi$ . На этот полукруг отобразится отрицательная полуполоса  $-\infty \leq x < 0, 0 \leq y \leq \pi$ . Полоса  $-\infty \leq x \leq +\infty, 0 \leq y \leq \pi$  перейдет в верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w \geq 0$ , а вся рассматриваемая полоса  $-\infty \leq x \leq +\infty, -\pi \leq y \leq +\pi$  отобразится на плоскость  $w$  с разрезом вдоль действительной оси от  $0$  до  $-\infty$ .

Вследствие периодичности показательной функции (2.61) каждая полоса

$$-\infty \leq x \leq +\infty, \quad -\pi + 2k\pi \leq y \leq +\pi + 2k\pi; \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

отображается на плоскость  $w$  с разрезом вдоль действительной оси от  $0$  до  $-\infty$ .

Для построения взаимно однозначного и непрерывного образа всей плоскости  $z$ , т. е. римановой поверхности, поступим следующим образом. Разобьем плоскость  $z$  на бесконечное счетное множество полос

$$-\infty \leq x \leq +\infty, \quad -\pi + k\pi \leq y \leq +k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

каждая из которых имеет ширину  $\pi$  (рис. 59).

Возьмем полосу

$$-\infty \leq x \leq +\infty, \quad -\pi \leq y \leq 0,$$

которой соответствует при отображении  $w = e^z$  нижняя полуплоскость и будем последовательно присоединять к ней полосы, расположенные над ней. Как известно, каждой из этих полос соответствует либо верхняя, либо нижняя полуплоскость. Для сохранения непрерывности отображения необходимо эти полуплоскости соединять в том же порядке,

что и полосы. Выполнив первый шаг, мы соединяем полосы

$$-\infty \leq x \leq +\infty, -\pi \leq y \leq 0$$

и

$$-\infty \leq x \leq +\infty, 0 \leq y \leq +\pi$$

вдоль всей действительной оси, а также нижнюю и верхнюю полуплоскости вдоль положительной действительной полуоси. При этом считаем, что в плоскости  $w$  получен лист римановой поверхности — например лист № 0. На втором шаге соединяем две следующие полосы вдоль прямой  $y = \pi$ , а также верхнюю и нижнюю полуплоскости вдоль действительной отрицательной полуоси. В результате получаем нижнюю полуплоскость, накрытую дважды, что указывает на получение половины следующего листа римановой поверхности — листа № 1. Продолжая этот процесс, будем вновь и вновь накрывать нижнюю и верхнюю полуплоскости, получая при этом следующие листы римановой поверхности — листы № 2, № 3, ..., расположенные в виде винтовой поверхности. Та же картина будет и при последовательном присоединении полос, расположенных ниже полосы

$$-\infty \leq x \leq +\infty, -\pi \leq y \leq 0.$$

В этом случае будем получать листы № — 1, № — 2, и т. д.

Таким образом, получаем закручивающуюся вокруг начала координат бесконечно много раз в обе стороны риманову поверхность, на которую функция  $w = e^z$  отображает плоскость  $z$ .

Рассмотрим, во что перейдет при отображении (2.61) произвольная прямая

$$x + my = p, \quad (2.65)$$

и ее параллельная ось координат. Уравнение указанной прямой представим в комплексной форме (см. п. 4), а именно:

$$\operatorname{Re}[(1 - im)z] = p.$$

Тогда уравнение ее образа будет

$$\operatorname{Re}[(1 - im)\ln w] = p$$

или

$$\operatorname{Re}[(1 - im)(\ln|w| + i\operatorname{Arg} w)] = p.$$

Отсюда находим

$$\ln|w| = p - m\operatorname{Arg} w.$$

Учитывая, что при наших обозначениях  $|w| = \rho$ , а  $\operatorname{Arg} w = \theta$ , последнее уравнение можно записать так:

$$\rho = e^p e^{-m\theta}. \quad (2.66)$$

Мы получили уравнение логарифмической спирали. Следовательно, при отображении  $w = e^z$  прямая (2.65) переходит в логарифмическую спираль (2.66), а декартова сетка плоскости  $z$ , повернутая на некоторый угол по отношению к системе координат, преобразуется в сетку логарифмических спиралей (рис. 60).

**27. Функция  $z = \operatorname{Ln} w$ .** Функцией, обратной к показательной  $w = e^z$ , является логарифмическая функция (см. п. 6), которая записывается в виде

$$z = \operatorname{Ln} w = \ln|w| + i\arg w; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.67)$$

где  $\ln|w| = \ln|w| + i\arg w$  — главное значение  $\operatorname{Ln} w$ . Логарифмическая функция, являясь бесконечнозначной аналитической функцией, реализует

взаимно однозначное и непрерывное отображение бесконечнолистной римановой поверхности на  $z$ -плоскость (см. рис. 59).

Если точка  $w$  совершил один или несколько полных оборотов вокруг точки  $w = 0$ , то при этом ее аргумент получит приращение, кратное  $2\pi$ , а сама точка перейдет на другой лист римановой поверхности, на котором, согласно (2.67), задана другая ветвь  $\ln w$ . Сколько бы оборотов в одном и том же направлении вокруг начала координат не совершила точка  $w$ , она никогда не вернется на первоначальный лист римановой поверхности. Поэтому точка  $w = 0$  есть *точка разветвления бесконечного порядка функции  $\ln w$* . Легко показать, что точка  $w = \infty$  является также *точкой разветвления бесконечного порядка* \*.

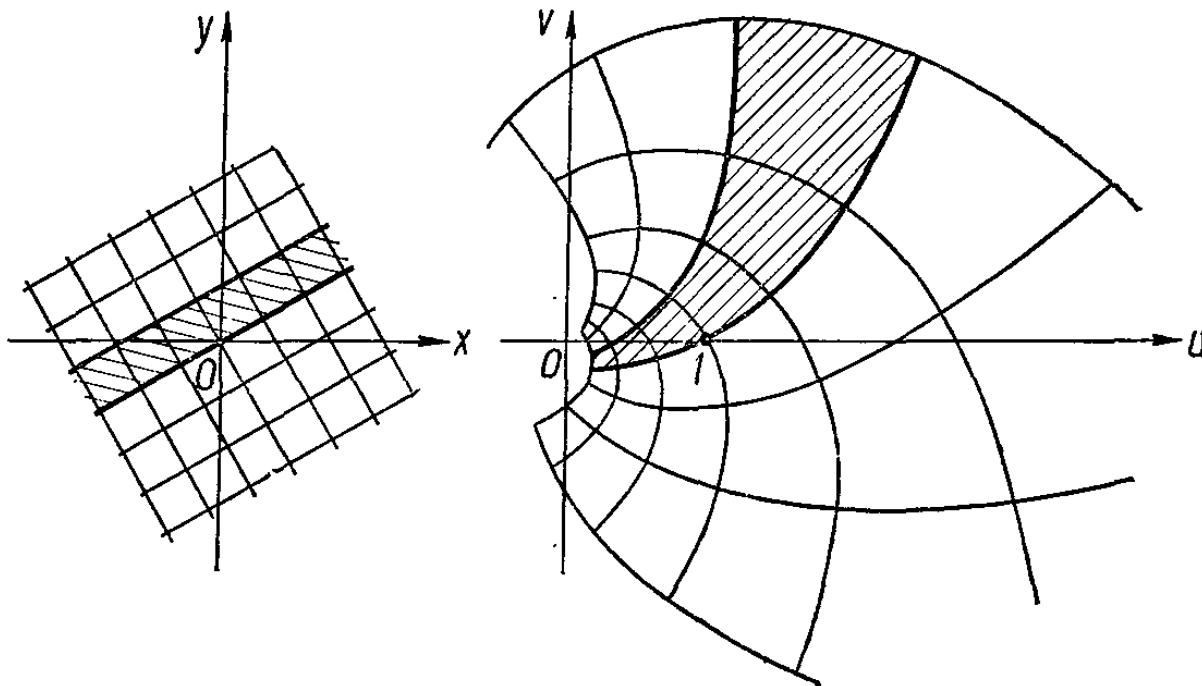


Рис. 60.

Функция  $z = \ln w$  (главное значение логарифма) отображает плоскость  $w$  с разрезом вдоль оси  $Ov$  от 0 до  $-\infty$  на полосу  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-\pi < y < +\pi$ , причем полярная сетка плоскости  $w$  отобразится в декартову сетку, принадлежащую указанной полосе (см. рис. 58).

Рассмотрим, во что отобразится функцией  $z = \ln w$  лежащая в плоскости  $w$  произвольная прямая, уравнение которой имеет вид

$$\operatorname{Im}(e^{-i\alpha_0} w) = d, \quad (2.68)$$

где  $d$  — расстояние этой прямой от начала координат,  $\alpha$  — угол, образуемый ею с действительной осью. Образом указанной прямой в плоскости  $z$  является линия, уравнение которой

$$\operatorname{Im}(e^{-i\alpha_0} e^z) = d,$$

или после очевидных преобразований

$$x = \ln d - \ln \sin(y - \alpha). \quad (2.69)$$

Из уравнения (2.69) видно, что при изменении  $d$  и  $\alpha$  линии переходят одна в другую в результате параллельного переноса. Исключение составляют только линии  $y = \alpha$ , которые являются образами лучей  $\theta = \alpha$ .

\* Точки разветвления бесконечного порядка рассмотренного нами типа называются также *логарифмическими точками разветвления*.

На рис. 61 показано, во что переходит декартова сетка плоскости  $w$ , причем мы ограничились изменением аргумента 0 от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ .

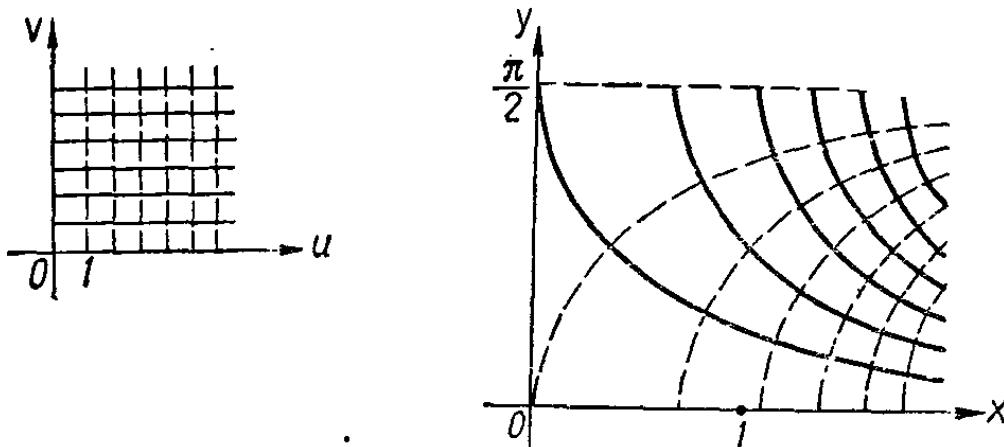


Рис. 61.

### § 3. Степенная функция

**28. Общие соображения.** Рассмотрим отображение, осуществляющее общей степенной функцией

$$w = z^\alpha, \quad (2.70)$$

где  $\alpha$  — произвольное комплексное постоянное.

Прологарифмировав равенство (2.70), а затем сделав замену переменных

$$\ln z = t, \quad (2.71)$$

$$\ln w = \tau, \quad (2.72)$$

получим

$$\tau = \alpha t. \quad (2.73)$$

Преобразование (2.73) реализует взаимно однозначное отображение плоскости  $t$  на плоскость  $\tau$ , являясь при этом соединением преобразований подобия и поворота (см. п. 20). Возвращаясь к исходным переменным  $z$  и  $w$ , видим, что преобразование (2.70) есть взаимно однозначное отображение римавовой поверхности логарифмической функции над плоскостью  $z$  на такую же поверхность над плоскостью  $w$ , при этом, согласно (2.71), полярная сетка в плоскости  $z$  переходит в декартову сетку в плоскости  $t$  (рис. 62, а). В плоскости  $\tau$  она поворачивается и растягивается, согласно (2.73), затем в плоскости  $w$ , согласно (2.72), преобразуется либо в сетку логарифмических спиралей, если  $\alpha$  не является действительным или чисто мнимым числом (рис. 62, б), либо в полярную сетку, когда  $\alpha$  — действительное или чисто мнимое число.

Если  $\alpha$  — действительное число, то, введя полярные координаты  $z = re^{i\Phi}$ ,  $w = Re^{i\Theta}$ , перепишем (2.70) в виде

$$R = r^\alpha, \quad \theta = \alpha\Phi. \quad (2.74)$$

Следовательно, в этом случае угловая область плоскости  $z$ , ограниченная двумя выходящими из начала координат лучами, переходит в угловую область плоскости  $w$  с углом, отличающимся от исходного множителем  $|\alpha|$ ; верхняя полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  отображается в угловую область плоскости  $w$  с углом  $\alpha\pi$ . Образом декартовой сетки в плоскости  $z$  является криволинейная сетка плоскости  $w$  (рис. 63).

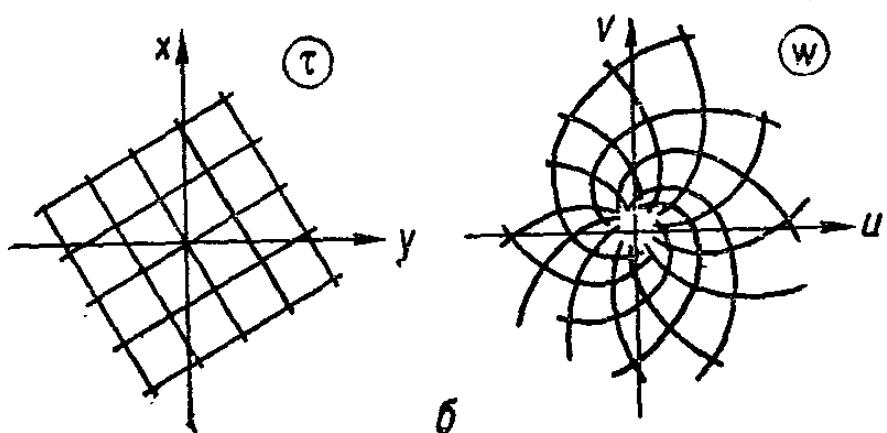
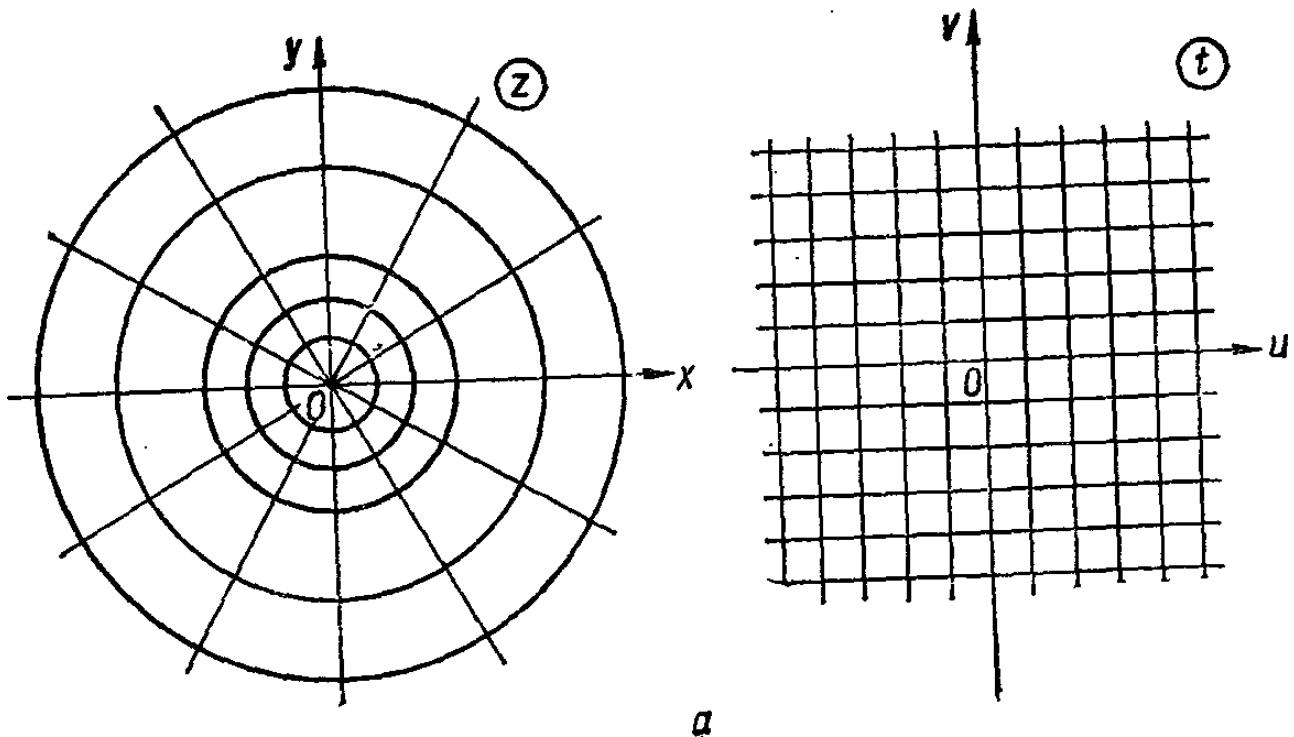


Рис. 62.

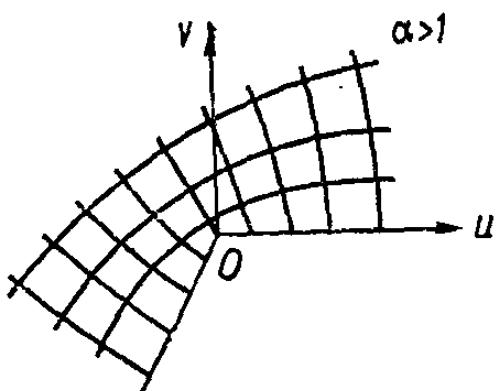
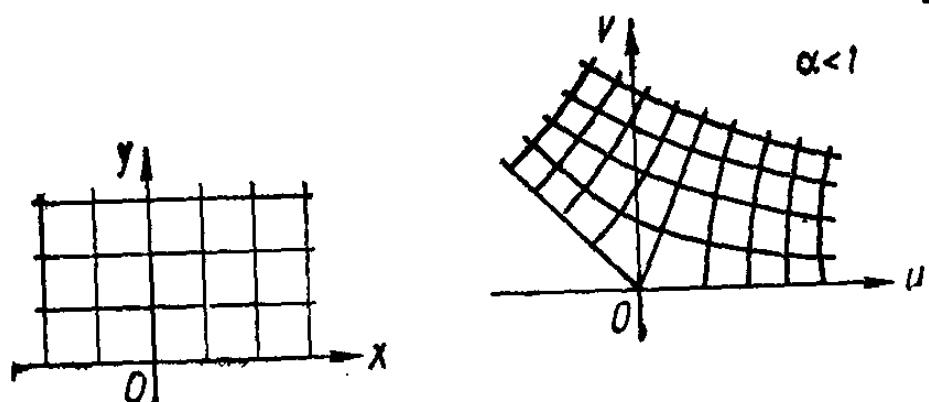


Рис. 63.

Следует отметить, что если показатель степени — рациональное число  $\alpha = \frac{p}{q}$ , то для установления взаимно однозначного соответствия при отображении (2.74) нет надобности использовать полную риманову поверхность логарифмической функции. Действительно, согласно второму из равенств (2.74), видно, что при увеличении аргумента любой точки плоскости  $z$  на  $2\pi q$  аргумент ее образа в плоскости  $w$  увеличивается на  $2\pi p$ , т. е.  $q$  полным оборотам любой точки вокруг начала координат в плоскости  $z$  соответствует  $p$  полных оборотов ее образа вокруг начала координат в плоскости  $w$ . Поэтому, соединив (отождествив

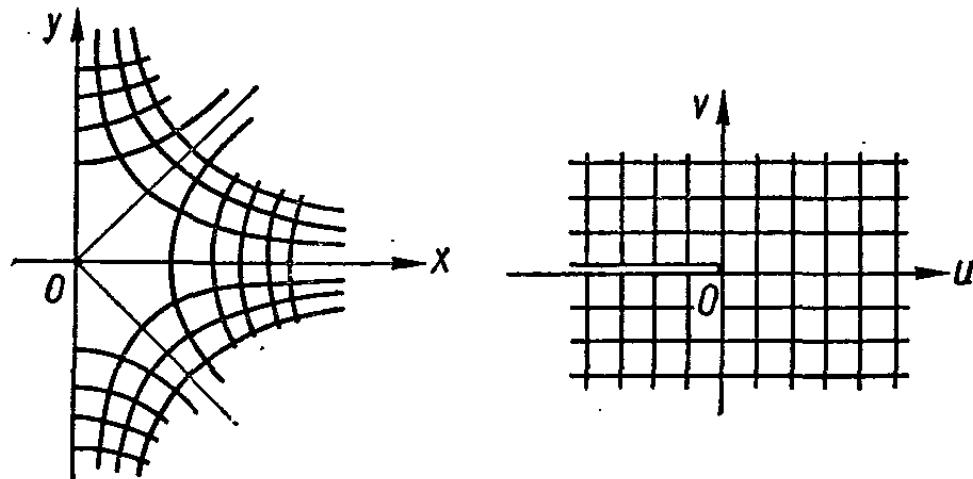


Рис. 64.

соответствующие точки)  $q$ -й и  $p$ -й листы римановых поверхностей логарифмической функции над плоскостями  $z$  и  $w$  с первым листом этих поверхностей, получим взаимно однозначное отображение  $q$ -листной поверхности над плоскостью  $z$  на  $p$ -листную поверхность над плоскостью  $w$ . Если  $q = 1$  ( $\alpha$  — натуральное число), то функция  $w = z^p$  реализует взаимно однозначное отображение плоскости  $z$  на  $p$ -листную поверхность рассмотренного выше типа. Так как полному обходу вокруг точки  $z = 0$  соответствует  $p$ -кратный обход вокруг ее образа  $w = 0$ , то точка  $w = 0$  является  $p$ -кратной точкой разветвления этой поверхности.

**29. Функция  $w = z^2$ .** Из частных случаев общей степениной функции часто используется в практических приложениях функция

$$w = z^2. \quad (2.75)$$

Из рассуждений предыдущего пункта следует, что при отображении, осуществляющем этой функцией, полярной сетке плоскости  $z$  соответствует полярная сетка плоскости  $w$ . При этом углы, образованные двумя выходящими из начала координат лучами, изменяются по величине в два раза; правая полуплоскость  $\operatorname{Re} z \geq 0$  отображается взаимно однозначно на плоскость  $w$  с разрезом вдоль действительной оси от точки  $w = 0$  до точки  $w = -\infty$  (рис. 64), а плоскость  $z$  — на двулистную риманову поверхность.

Для более детального изучения отображения, осуществляемого этой функцией, удобно пользоваться декартовыми координатами

$$z = x + iy, \quad w = u + iv. \quad (2.76)$$

Подставляя в (2.75) вместо  $z$  и  $w$  их значения (2.76) и разделяя затем действительные и мнимые части, находим

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (2.77)$$

Отсюда заключаем, что при отображении (2.75) декартовой сетке

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}$$

плоскости  $w$  соответствует представленная на рис. 64 сетка равнобочных гипербол плоскости  $z$

$$x^2 - y^2 = u = \text{const}; \quad xy = \frac{v}{2} = \text{const};$$

причем координатная ось  $u = 0$  является образом ломаной, состоящей из биссектрис первого и четвертого координатных углов, действительная положительная полуось  $v = 0, u \geq 0$  — образом действительной положительной полуоси  $y = 0, x \geq 0$ , а верхний и нижний берега

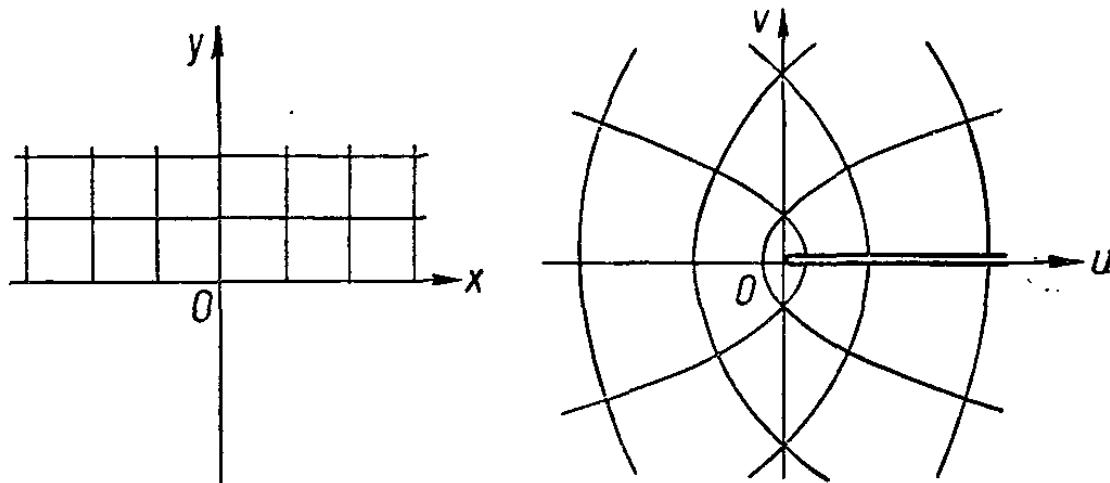


Рис. 65.

разреза вдоль действительной оси от точки  $w = 0$  до точки  $w = -\infty$  — образами соответственно координатных полуосей  $x = 0, y \geq 0$  и  $x = 0, y \leq 0$ .

Легко показать, во что перейдет декартова сетка  $x = \text{const}, y = -\text{const}$  плоскости  $z$ . Исключив из системы (2.77) вначале  $y$ , а затем  $x$ , получим

$$v^2 = 4x^2 (-u + x^2),$$

$$v^2 = 4y^2 (u + y^2).$$

Это уравнения двух семейств софокусных парабол с параметрами  $x^2$  и  $y^2$  с общим фокусом, находящимся в начале координат, и общей осью, совпадающей с осью  $v = 0$ . Указанные два семейства, симметричные относительно оси  $u = 0$ , образуют параболическую сетку плоскости  $w$ , в которую переходит при отображении (2.75) декартова сетка плоскости  $z$  (рис. 65).

Следует отметить, что, согласно формулам (2.74), повороту декартовой сетки и сетки равнобочных гипербол в плоскости  $z$  соответствует удвоенный поворот параболической и декартовой сеток в плоскости  $w$ . Поэтому при отображении (2.75) любая не проходящая через точку  $z = 0$  прямая переходит в параболу плоскости  $w$ , а прообразом произвольной не проходящей через точку  $w = 0$  прямой является равнобочная гипербола плоскости  $z$ .

Выясним теперь, чему соответствует при отображении (2.75) полярная сетка с полюсом в точке  $w = 1$ , в которую переходит точка  $z = 1$ .

В пучок концентрических окружностей

$$|w - 1| = \text{const}$$

преобразуется семейство линий

$$|z^2 - 1| = |z - 1||z + 1| = \text{const},$$

которые называются *овалами Кассини*. В частности, проходящая через точку  $w = 0$  окружность

$$|w - 1| = 1$$

является образом *лемнискаты Бернулли*

$$|z - 1||z + 1| = 1.$$

В пучок прямых, проходящих через точку  $w = 1$ , переходит семейство равнобочих гипербол, пересекающихся в точке  $z = 1$  (рис. 66).

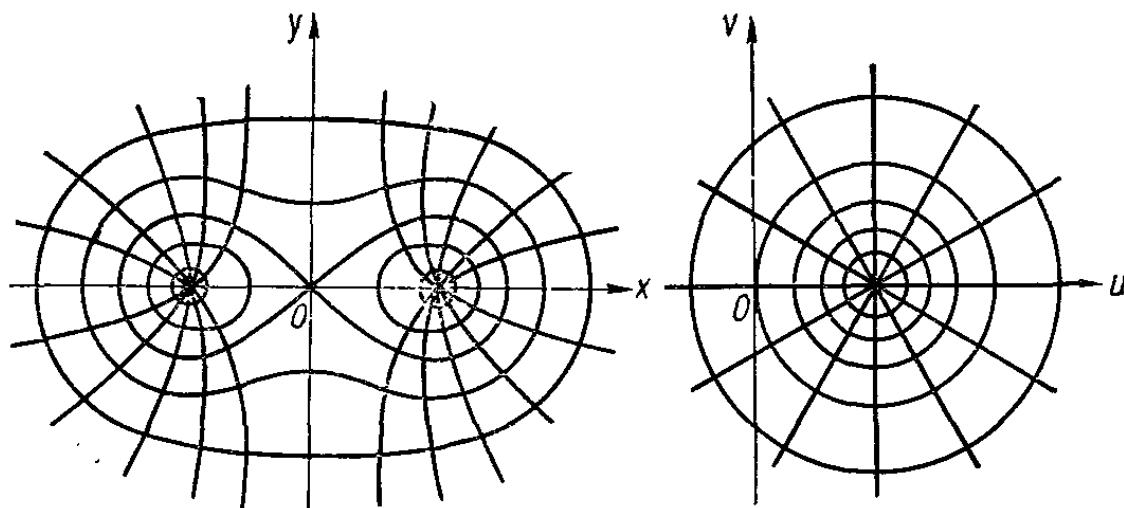


Рис. 66.

Полярная сетка с полюсом в точке  $z = 1$  отображается функцией (2.75) в сетку, состоящую из двух семейств линий. Линии одного семейства, будучи образами пучка проходящих через точку  $z = 1$  прямых, являются параболами. Линии же второго семейства есть образы окружностей

$$z = 1 + re^{i\Phi}, \quad (2.78)$$

где  $r$  — радиус окружности, а  $\Phi$  — текущий параметр, являющийся углом между радиусом-вектором и осью  $y = 0$ . Подставляя в (2.75) вместо  $z$  его значение (2.78), находим параметрическое уравнение линий второго семейства

$$w = 1 + 2re^{i\Phi} + r^2e^{2i\Phi}.$$

В частности, проходящая через точку  $z = 0$  окружность

$$z = 1 + e^{i\Phi}$$

преобразуется в *кардиоиду* (рис. 67)

$$w = 1 + 2e^{i\Phi} + e^{2i\Phi}.$$

**30. Функция  $w = z^{-2}$ .** Отображение, осуществляющее функцией

$$w = z^{-2}, \quad (2.79)$$

можно представить как *суперпозицию* двух рассмотренных ранее преобразований

$$\tau = z^2, \quad (2.80)$$

$$w = \tau^{-1}. \quad (2.81)$$

Отсюда заключаем, что для функции  $w = z^{-2}$  риманова поверхность, та же, что и для функции  $w = z^2$ . Согласно (2.81), декартовой сетки

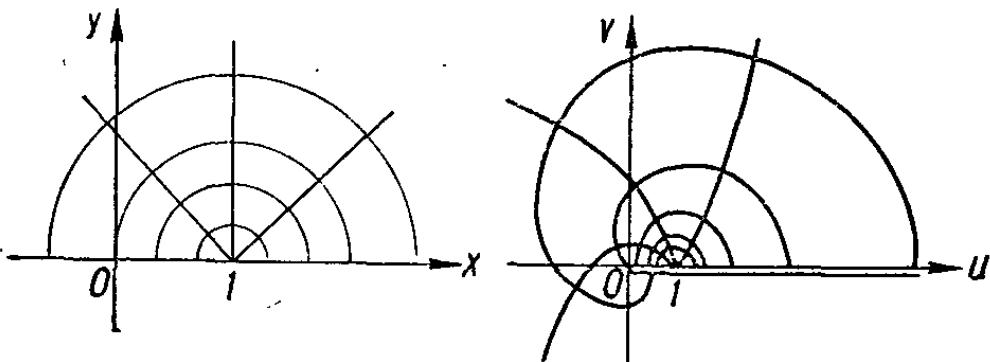


Рис. 67.

плоскости  $w$  соответствует сетка окружностей плоскости  $\tau$ , касающихся в начале координат действительной и мнимой осей (см. п. 21). В силу (2.80) указанная сетка окружностей является образом сетки лемнискат плоскости  $z$ . Поэтому функция (2.79) отображает сетку лемнискат плоскости  $z$  в декартову сетку плоскости  $w$  (рис. 68).

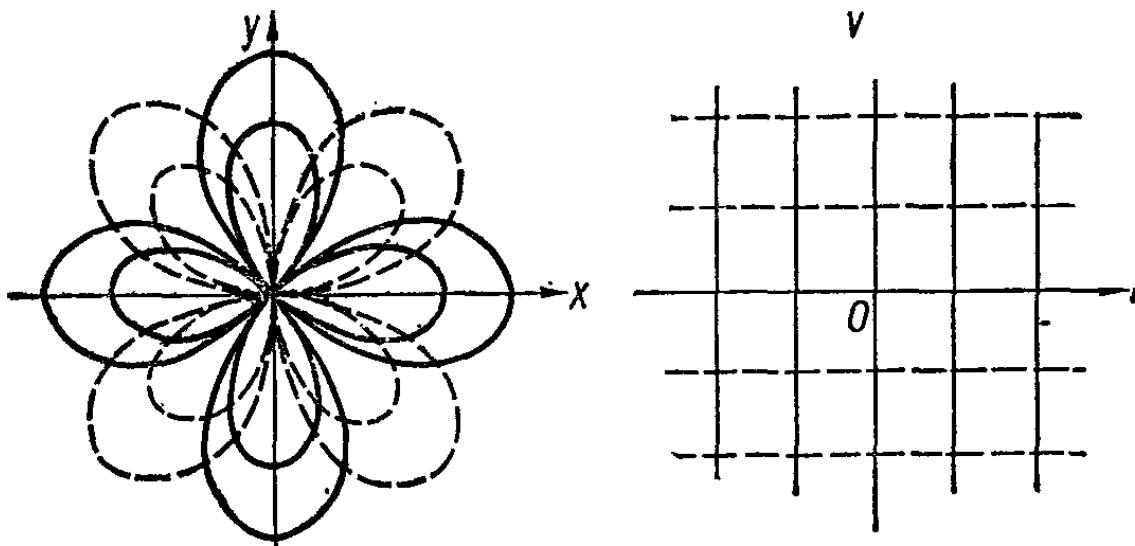


Рис. 68.

Разобьем теперь отображение (2.79) на следующие два преобразования:

$$\tau = z^{-1}, \quad (2.82)$$

$$w = \tau^2. \quad (2.83)$$

Преобразование (2.82) переводит декартову сетку плоскости  $z$  в сетку окружностей плоскости  $\tau$  (см. п. 21). Преобразование (2.83) отображает указанную сетку окружностей в сетку кардиоид плоскости  $w$ . Таким образом, в результате отображения (2.79) получаем отображение декартовой

сетки плоскости  $z$  в сетку кардиоид плоскости  $w$  (рис. 69).

**Замечание.** Так как при отображении  $w = z^{-2}$  декартовой сетке плоскости  $w$  соответствует сетка лемнискат плоскости  $z$ , а декартовой сетке плоскости  $z$  соответствует сетка кардиоид плоскости  $w$ , то, согласно (2.82) и (2.83), функция  $\tau = z^{-1}$  отображает сетку лемнискат в плос-

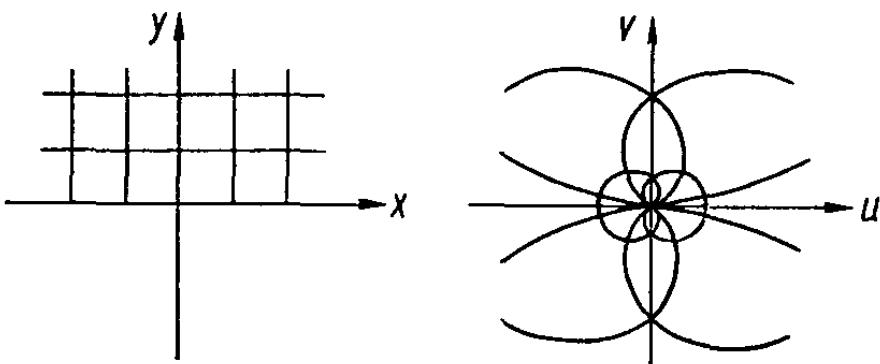


Рис. 69.

кости  $z$  в сетку равнобочных гипербол плоскости  $\tau$ , а в силу (2.80) и (2.81) функция  $w = \tau^{-1}$  отображает сетку парабол плоскости  $\tau$  в сетку кардиоид плоскости  $w$ .

#### § 4. Тригонометрические и гиперболические функции

**31. Функция  $w = \cos z$ .** Тригонометрические и гиперболические функции  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{sh} z$  были определены в п. 6. Для них имеют место следующие равенства:

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad (2.84)$$

$$\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad (2.85)$$

$$\operatorname{ch} z = \cos iz = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \quad (2.86)$$

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}). \quad (2.87)$$

Согласно приведенным формулам, достаточно изучить отображение, совершающееся только функцией

$$w = \cos z, \quad (2.88)$$

так как к ней при помощи сдвигов и поворотов сводятся остальные три функции.

Пользуясь формулой для косинуса суммы двух аргументов и учитывая (2.86) и (2.87), перепишем равенство (2.88) в виде

$$w = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Разделив действительные и мнимые части, будем иметь

$$\begin{aligned} u &= \cos x \operatorname{ch} y, \\ v &= -\sin x \operatorname{sh} y. \end{aligned} \quad (2.89)$$

При  $0 < x < 2\pi$ ,  $y = \text{const}$  получаем в плоскости  $w$  параметрическое уравнение эллипса, полуоси которого равны  $\text{ch } y$ ,  $|\text{sh } y|$ , а фокусы расположены в точках

$$w = \pm \sqrt{(\text{ch}^2 y - \text{sh}^2 y)} = \pm 1;$$

причем двум значениям  $y = \pm \text{const}$ , равным по абсолютной величине и противоположным по знаку, соответствуют два совпадающие эллипсы, обходящие в противоположных направлениях: отрицательном (положительном) для положительных (отрицательных) значений. Для  $y = 0$  получаем разрез, соединяющий точки  $w = -1$  и  $w = +1$ . Увеличение значений  $|y|$  приводит к получению эллипсов, по форме приближающихся к окружностям.

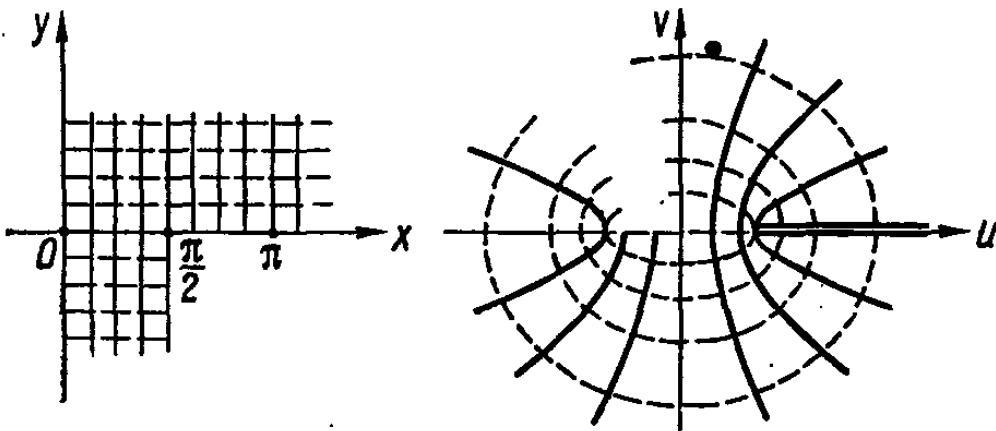


Рис. 70.

При  $x = \text{const}, -\infty < y < \infty$  формулы (2.89) являются параметрическим уравнением ветви гиперболы, полуоси которой равны  $|\cos x|$ ,  $|\sin x|$ , а фокусы расположены в точках

$$w = \pm \sqrt{(\cos^2 x + \sin^2 x)} = \pm 1.$$

Уравнение асимптот гиперболы будет:

$$\frac{v}{u} = \pm \frac{\sin x}{\cos x} = \pm \operatorname{tg} x$$

или

$$\arg w = \pm x.$$

Для значения  $x = \pi$  получаем разрез вдоль действительной оси, соединяющий точки  $w = -1$  и  $w = -\infty$ , а для значения  $x = 2\pi$  — разрез вдоль этой же оси, соединяющий точки  $w = 1$  и  $w = \infty$ . Значениям  $x = \frac{\pi}{2}$ , и  $x = \frac{3}{2}\pi$  соответствует мнимая ось плоскости  $w$ .

Следовательно, декартова сетка плоскости  $z$  отображается функцией  $w = \cos z$  в сетку, состоящую из софокусных эллипсов и гипербол (рис. 70).

Так как для функции  $\cos z$  имеет место соотношение

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z,$$

то функция, обратная  $\cos z$ ,  $z = \operatorname{Arc} \cos w$ , является многозначной. Областью однолистности отображения  $w = \cos z$  является полуполоса

$$0 < x < 2\pi, -\infty < y < 0.$$

Зная отображение этой полуполосы, можно распространить полученные результаты на всю  $z$ -плоскость. Действительно, из сказанного выше следует, что заштрихованные и расположенные в шахматном порядке

на рис. 71 полуполосы отображаются на верхнюю полуплоскость, остальные полуполосы — на нижнюю полуплоскость. Поэтому можно построить над плоскостью  $z$  риманову поверхность, на которую функция  $w = \cos z$  взаимно однозначно отображает плоскость  $z$ .

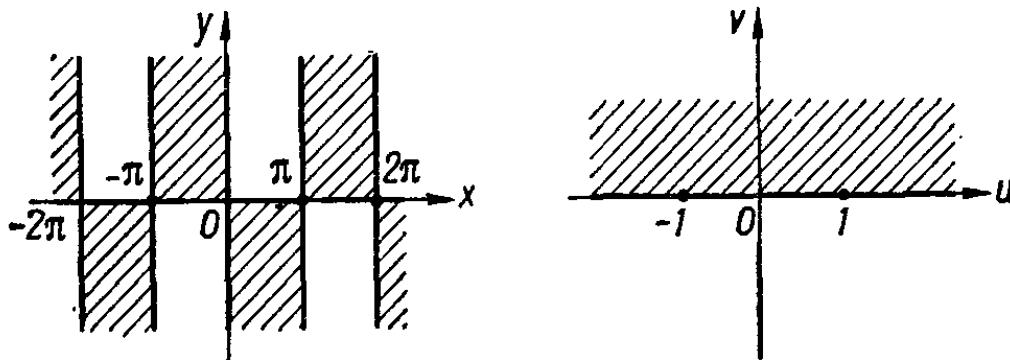


Рис. 71.

32. Функция  $w = \operatorname{tg} z$ . Эта функция выражается через показательную функцию следующим образом:

$$w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - 1}{i(e^{iz} + 1)}. \quad (2.90)$$

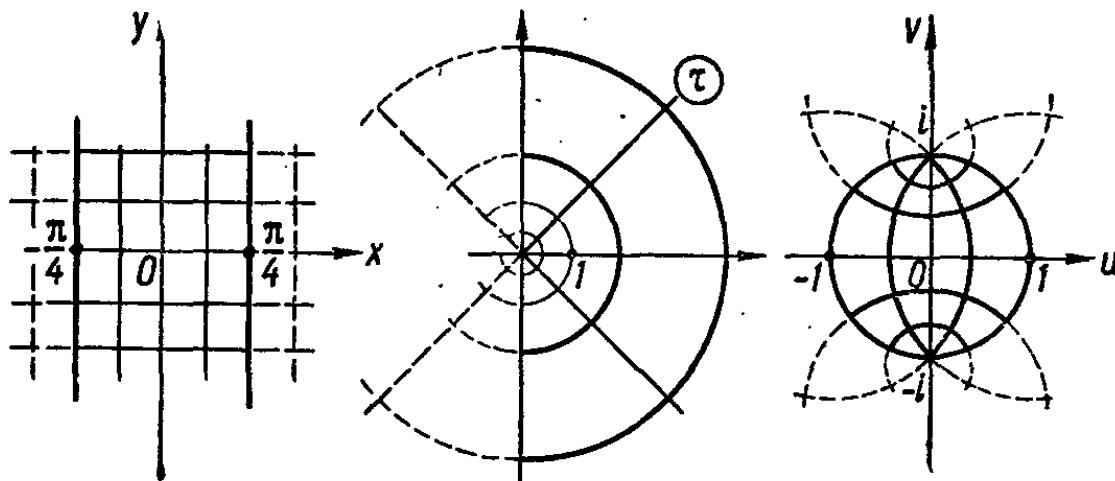


Рис. 72.

Поэтому отображение (2.90) можно представить как суперпозицию двух рассмотренных ранее преобразований

$$\tau = e^{iz} \quad (2.91)$$

и

$$w = \frac{\tau - 1}{i(\tau + 1)}. \quad (2.92)$$

Преобразование (2.91) переводит декартову сетку плоскости  $z$  в полярную сетку плоскости  $\tau$ . Полярная сетка плоскости  $\tau$  переходит при отображении (2.92) в сетку окружностей плоскости  $w$ , которая состоит из окружностей, пересекающихся в точках  $w = \pm i$  и им ортогональных. При этом полоса

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{4} &\leq x \leq +\frac{\pi}{4}, \\ -\infty &< y < +\infty \end{aligned}$$

отображается сначала в правую полуплоскость  $\operatorname{Re} \tau > 0$ , а затем в единичный круг  $|w| \leq 1$  (рис. 72).

**КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ  
ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕГРАЛА  
КРИСТОФФЕЛЯ — ШВАРЦА**

Как уже отмечалось, весьма трудной и в то же время очень важной для практического применения является задача нахождения явного вида аналитической функции, конформно отображающей одну наперед заданную область на другую заданную область.

В общем случае, когда рассматриваемые области ограничены произвольными кусочно-гладкими кривыми (без точек самопересечения), поставленная задача решается при помощи различных приближенных методов [39].

Однако в отдельных случаях удается реализовать точнее отображение одной области на другую. Типичные примеры таких отображений были рассмотрены в предыдущей главе. Наиболее эффективно задача о точном отображении решается для полигональных областей (многоугольников), когда применение интеграла Кристоффеля — Шварца позволяет в ряде случаев найти искомую отображающую функцию в замкнутом виде, т. е. в виде некоторого явного конечного выражения.

В данной главе приведен полный вывод формулы Кристоффеля — Шварца и рассмотрен ряд примеров конформного отображения наперед заданных областей (прямолинейных многоугольников), для которых поставленная выше задача решается полностью и до конца. Найденные отображающие функции, по возможности, приводятся к виду, удобному для их практического использования.

Во всех последующих параграфах примем следующие обозначения.

Прямолинейные многоугольники будем обозначать фигурными скобками, внутри которых указываются величины углов  $\alpha_k$  (в долях от  $\pi$  или  $180^\circ$ ), например прямоугольник будем обозначать символом  $\{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4\}$ .

Соответствующие вершинам многоугольников точки в плоскости  $z = x + iy$  будем обозначать через  $a_k$ , а их образы в плоскости  $w = u + iv$  через  $A_k$ . Образы точек  $a_k$  на вспомогательной плоскости  $\xi = \xi + i\eta$  обозначим через  $a_k^*$ .

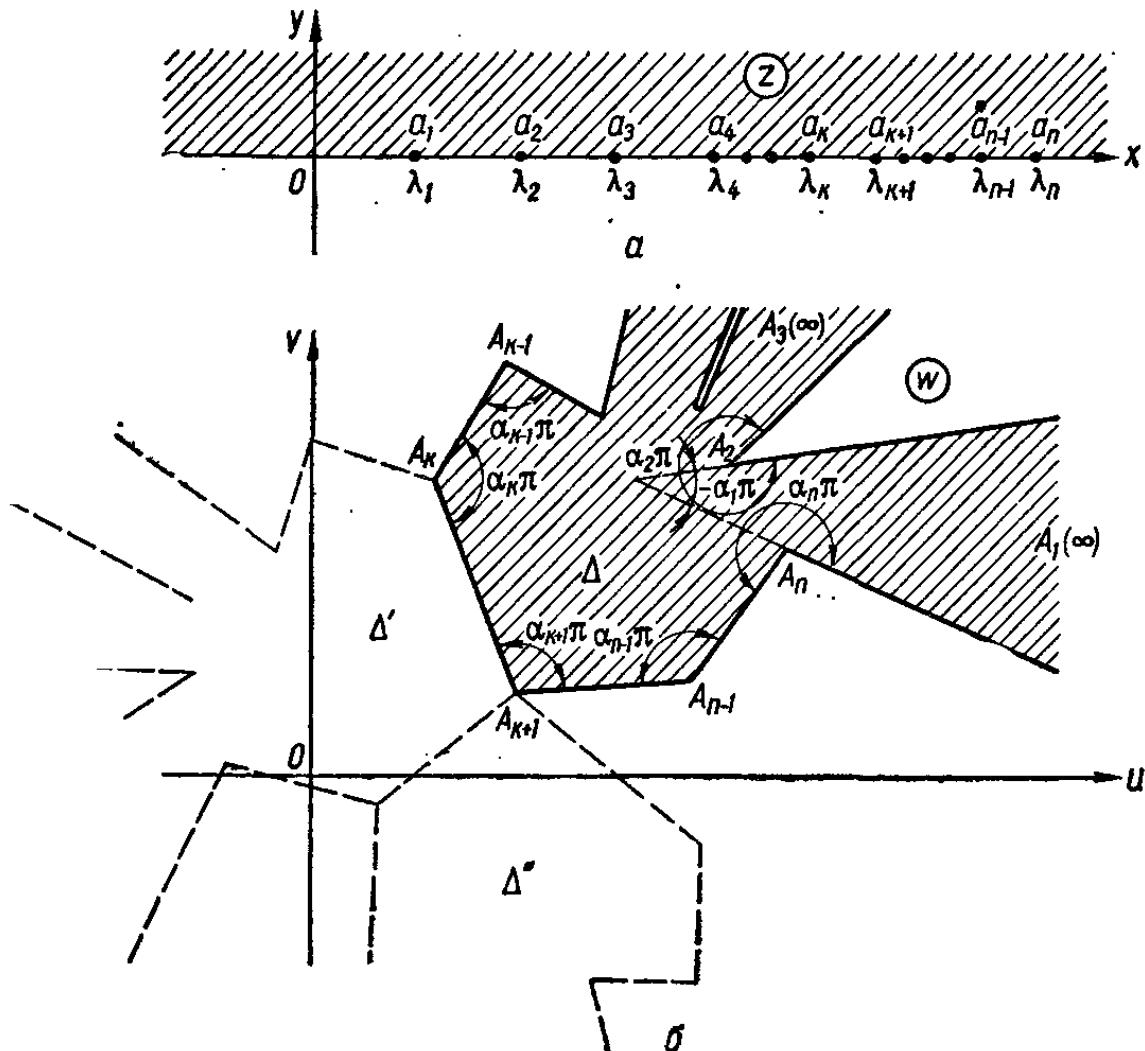
Соответствене точек при конформном отображении верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z \leq 0$  на плоскости  $w$  будем задавать в следующей форме:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
-----	-------	-------	------------

Такая форма удобна для записи общего вида искомой отображающей функции через интеграл Кристоффеля — Шварца.

## § 1. Интеграл Кристоффеля — Шварца

**33. Отображение прямолинейного многоугольника. Формула Кристоффеля — Шварца.** Найдем общий вид функции, реализующей конформное отображение верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z \geq 0$  на произвольный односвязный и однолистный многоугольник  $w$  с внутренними углами  $\alpha_k\pi$  при вершинах  $A_k$ . Для определенности поставим в соответствие (с соблюдением направления обхода области) трем конечным



*Рис. 73.*

точкам  $a_1, a_{n-1}, a_n$  действительной оси плоскости  $z$  с координатами соответственно  $\lambda_1, \lambda_{n-1}$  и  $\lambda_n$  три вершины  $A_1, A_{n-1}$  и  $A_n$  многоугольника  $w$ , который обозначим через  $\Delta$  (рис. 73). Тогда, согласно теореме Римана (см. п. 19), существует единственная функция  $w = f(z)$ , реализующая конформное отображение верхней полуплоскости на многоугольник  $\Delta$ . По теореме о соответствии границ вершины многоугольника  $A_2, A_3, \dots, A_{n-2}$  будут образами некоторых точек  $a_2, a_3, \dots, a_{n-2}$  действительной оси, причем все эти точки находятся на конечном расстоянии. Бесконечно удаленная точка плоскости  $z$  соответствует некоторой точке, лежащей за стороне  $A_n A_1$  многоугольника. Так как интервалы, заключенные между точками  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), перейдут в стороны многоугольника  $\Delta$ , то по принципу симметрии функция  $w = f(z)$  допускает аналитическое продолжение через любой интервал  $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$  в нижнюю полуплоскость, причем аналитическое продолжение реализует конформное отображение нижней полуплоскости на многоугольник  $\Delta'$ , симметричный

с многоугольником  $\Delta$  относительно стороны  $A_k A_{k+1}$ . Полученное аналитическое продолжение можно снова аналитически продолжить через любой интервал  $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$  в верхнюю полуплоскость, получая конформное отображение верхней полуплоскости на многоугольник  $\Delta''$ , симметричный с многоугольником  $\Delta'$  относительно стороны  $A_k, A_{k+1}$ , соответствующей интервалу  $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ . Выполняя всевозможные аналитические продолжения, получим, вообще говоря, бесконечнозначную аналитическую функцию  $w = F(z)$ , для которой исходная функция  $f(z)$  является в верхней полуплоскости одной из однозначных ветвей. Точки  $\lambda_k$  будут особыми точками функции  $w = F(z)$ . Обходу вокруг точки  $\lambda_k$  из верхней полуплоскости в нижнюю и обратно в верхнюю соответствует переход от одной ветви многозначной функции  $F(z)$  к другой ее ветви. В верхней полуплоскости любые две ветви  $f_*(z)$  и  $f_{**}(z)$  осуществляют конформное отображение этой полуплоскости на два многоугольника  $\Delta^*$  и  $\Delta^{**}$ , отличающиеся один от другого на четное число симметрий относительно стороны. А так как всякая пара симметрий относительно двух произвольных прямых сводится к некоторому сдвигу и повороту, то всюду в верхней полуплоскости справедливо соотношение

$$f_{**}(z) = e^{i\varphi} f_*(z) + a, \quad (3.1)$$

где  $\varphi$  и  $a$  — постоянные, зависящие от формы многоугольника и способа аналитического продолжения. Линейной зависимостью вида (3.1) также связаны любые две ветви функции  $F(z)$  в нижней полуплоскости.

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{d}{dz} \ln f'(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)},$$

которая остается однозначной при всевозможных аналитических продолжениях  $f(z)$ , так как в силу (3.1) выражение  $\frac{f''(z)}{f'(z)}$  является инвариантным относительно целого линейного преобразования функции  $f(z)$ . Функция  $g(z)$  аналитична всюду в полной плоскости  $z$ , кроме точек  $\lambda_k$ . Аналитичность  $g(z)$  в бесконечно удаленной точке следует из того, что точка  $z = \infty$  переходит при отображении  $w = f(z)$  в некоторую точку на стороне многоугольника, а не в его вершину.

Исследуем поведение функции  $g(z)$  в окрестности точки  $\lambda_k$ . Приналежащую многоугольнику окрестность вершины  $A_k$ , соответствующую при отображении  $w = f(z)$  принадлежащей верхней полуплоскости  $z$  окрестности точки  $\lambda_k$ , при помощи сдвига и поворота, т. е. целого линейного преобразования  $t(w)$ , можно привести к одной из нормальных форм (рис. 74, *a, b, в, г, д*). В случаях *а* и *б* при помощи функции  $t(t)$ , определяемой равенством

$$t\alpha_k = t, \quad (3.2)$$

отобразим представленные окрестности на принадлежащую верхней полуплоскости окрестность точки  $t = 0$  (рис. 74, *е*). Тогда функция  $t(z)$  отобразит взаимно однозначно и конформно часть верхней полуплоскости в окрестности точки  $\lambda_k$  на часть верхней полуплоскости в окрестности точки  $t = 0$ , причем участок действительной оси в окрестности точки  $\lambda_k$  перейдет в участок действительной оси в окрестности точки  $t = 0$ . Согласно принципу симметрии, отображение конформно и в точке  $\lambda_k$ , а следовательно, функция  $t(z)$  может быть представлена рядом Тейлора

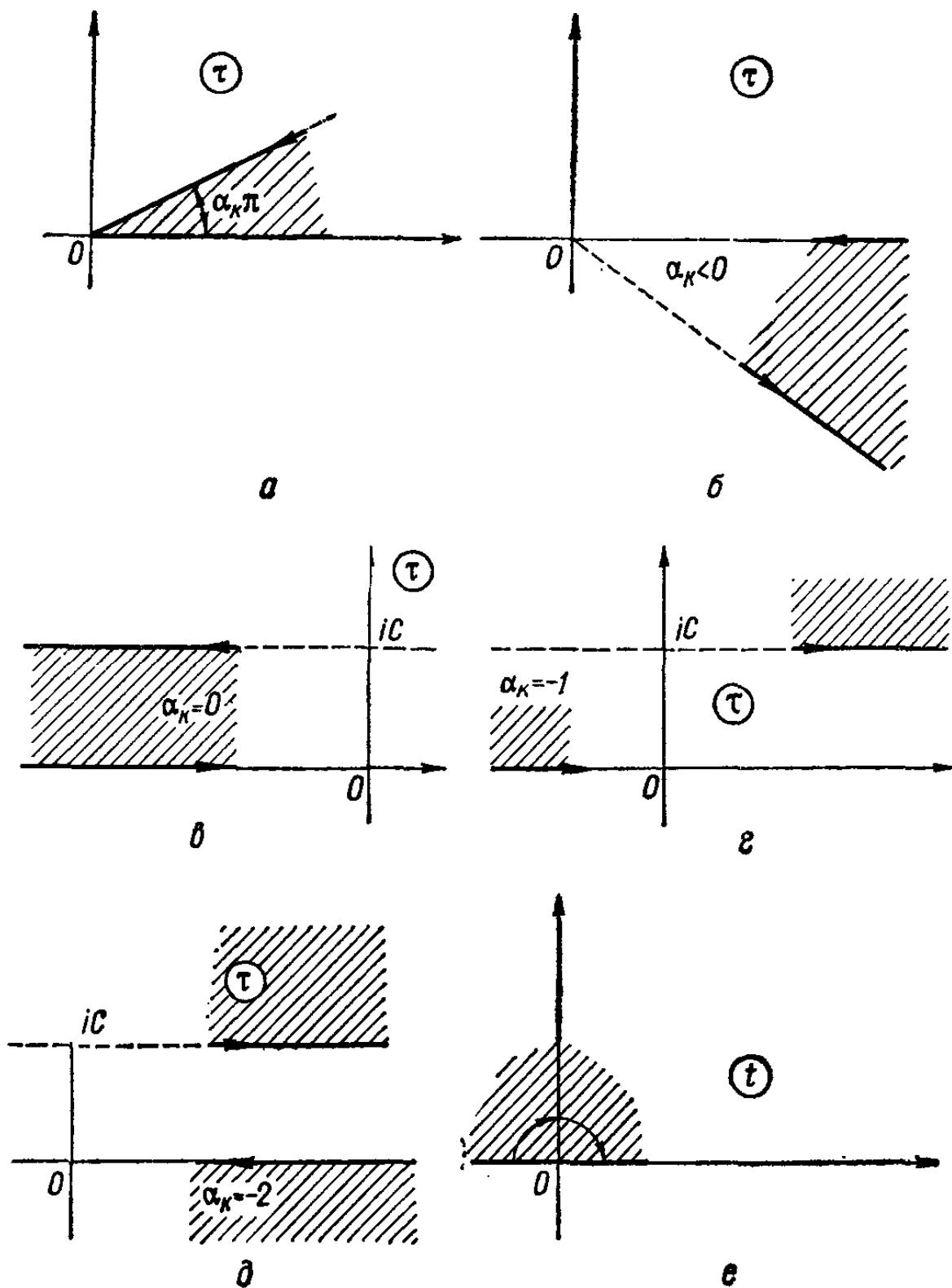


Рис. 74.

$$t(z) = c_1(z - \lambda_k) + c_2(z - \lambda_k)^2 + c_3(z - \lambda_k)^3 + \dots, \quad (3.3)$$

где  $c_1 \neq 0$ .

Из равенств (3.2) и (3.3) получаем разложение для  $\tau(z)$ :

$$\tau(z) = (z - \lambda_k)^{\alpha_k} [c_1 + c_2(z - \lambda_k) + \dots]^{\alpha_k}.$$

Так как выражение в квадратной скобке отлично от нуля при значении  $z = \lambda_k$ , то в некоторой окрестности точки  $\lambda_k$  можно выделить однозначную аналитическую ветвь функции  $[c_1 + c_2(z - \lambda_k) + \dots]^{\alpha_k}$ .

Разлагая эту ветвь в ряд Тейлора, получаем следующее представление функции  $\tau(z)$  в окрестности точки  $\lambda_k$ :

$$\tau(z) = (z - \lambda_k)^{\alpha_k} [b_0 + b_1(z - \lambda_k) + \dots]. \quad (3.4)$$

Учитывая (3.4) и то, что  $g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{\tau''(z)}{\tau'(z)}$ , получим разложение функции  $g(z)$  в окрестности точки  $\lambda_k$  в виде

$$g(z) = \frac{\alpha_k - 1}{z - \lambda_k} + a_0 + a_1(z - \lambda_k) + \dots \quad (3.5)$$

Эти же рассуждения легко обобщаются и на остальные случаи. При помощи функции  $t(\tau)$ , определяемой равенствами

$$\frac{c}{\pi} \ln t = \tau; \quad -t^{-1} + \frac{c}{\pi} \ln t = \tau; \quad t^{-2} + \frac{c}{\pi} \ln t = \tau \quad (3.6)$$

соответственно для случаев  $\sigma$ ,  $\varrho$  и  $\delta$ , отобразим представленные окрестности на принадлежащую верхней полуплоскости окрестность точки  $t = 0$ . Как и выше, для функции  $t(z)$ , отображающей конформно часть верхней полуплоскости в окрестности точки  $\lambda_k$  на часть верхней полуплоскости в окрестности точки  $t = 0$ , получим разложение (3.3). Для функции  $\tau(z)$  во всех трех указанных случаях справедливо такое разложение:

$$\tau(z) = (z - \lambda_k)^{\alpha_k} [b'_0 + b'_1(z - \lambda_k) + \dots] + \frac{c}{\pi} \ln(z - \lambda_k), \quad (3.7)$$

а для функции  $g(z)$  получим снова разложение вида (3.5).

Следовательно, во всех указанных пяти случаях точка  $\lambda_k$  является для функции  $g(z)$  полюсом первого порядка с вычетом, равным  $\alpha_k - 1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). А так как других особенностей во всей расширенной плоскости функция  $g(z)$  не имеет, то она имеет лишь  $n$  полюсов и является рациональной. Выясним ее поведение в окрестности бесконечно удаленной точки. Функция  $f(z)$  стремится к определенному значению, а именно к координате  $d_\infty$  конечной точки стороны многоугольника, при стремлении  $z$  к бесконечности. Значит, в окрестности бесконечно удаленной точки получаем для  $w = f(z)$  следующее разложение:

$$f(z) = d_\infty + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \dots \quad (3.8)$$

Отсюда следует, что  $g(z)$  в окрестности точки  $z = \infty$  имеет разложение вида

$$g(z) = -\frac{2}{z} + \frac{d'_2}{z^2} + \frac{d'_3}{z^3} + \dots, \quad (3.9)$$

т. е. эта функция стремится к нулю при  $z$ , стремящемуся к бесконечности.

Вычитая из  $g(z)$  сумму главных частей ее разложения в точках  $\lambda_k$ , получим функцию

$$G(z) = g(z) - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - \lambda_k}, \quad (3.10)$$

регулярную во всей полной плоскости.

Согласно теореме Лиувилля, функция  $G(z)$  должна быть постоянной, а так как  $g(\infty) = 0$ , то и  $G(z) = G(\infty) = 0$ . Следовательно,

$$g(z) = -\frac{d}{dz} \ln f'(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - \lambda_k}. \quad (3.11)$$

Интегрируя выражение (3.11) вдоль любого пути, лежащего в верхней полуплоскости, а затем потенцируя, получаем

$$f'(z) = C \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k)^{\alpha_k - 1}.$$

Проинтегрировав второй раз, находим искомое выражение для  $f(z)$

$$w = C \int_0^z \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} dz + C_1, \quad (3.12)$$

где  $C$  и  $C_1$  — некоторые комплексные постоянные. Полученное представление отображающей функции (3.12) известно под названием *формулы или интеграла Кристоффеля — Шварца*.

**Замечание.** Воспользовавшись теоремой о вычетах, а также разложениями (3.5) и (3.9), для величин  $\alpha_k$  имеем

$$\sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k) = 2, \quad (3.13)$$

т. е. хорошо известное соотношение для суммы углов ограниченного многоугольника имеет место и для неограниченного многоугольника.

**34. Некоторые случаи отображения многоугольника.** Пусть одной из вершин многоугольника  $\Delta$ , например  $A_n$ , соответствует бесконечно удаленная точка  $\lambda_n = \infty$ . Покажем, что этот случай приводится к предыдущему.

Выполним дробно-линейное преобразование

$$\zeta = -\frac{1}{z} + \lambda'_n \quad (3.14)$$

полуплоскости  $\operatorname{Im} z \geq 0$  на полуплоскость  $\operatorname{Im} \zeta \geq 0$ , переводящее точки  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = \infty$  в конечные \* точки  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$ . Применяя формулу (3.12) к полу平面  $\zeta$  и учитывая (3.14), получим

$$\begin{aligned} w &= C' \int_0^\zeta \prod_{k=1}^n (\zeta - \lambda'_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta + C'_1 = \\ &= C' \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \left( \lambda'_n - \frac{1}{z} - \lambda'_k \right)^{\alpha_k - 1} \frac{1}{z^2} dz + C'_1. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (3.13) для углов многоугольника, после элементарных преобразований интеграла получим окончательно

$$w = C \int_0^z \prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} dz + C_1, \quad (3.15)$$

где  $\lambda_k = \frac{1}{\lambda'_n - \lambda'_k}$  — некоторые действительные постоянные.

---

\* Если одна из точек  $\lambda_k = 0$ , то можно воспользоваться преобразованием  $\zeta = \frac{-1}{z - \lambda} + \lambda'_n$ , где  $\lambda$  отлично от всех  $\lambda_k$ .

Следовательно, если одной из вершин многоугольника соответствует бесконечно удаленная точка действительной оси, то относящийся к этой вершине множитель в формуле Кристоффеля — Шварца (3.12) выпадает. Это обстоятельство используется для упрощения подынтегрального выражения интеграла Кристоффеля — Шварца.

Для получения функции, отображающей единичный круг  $|z| \leq 1$  на  $n$ -угольник  $\Delta$ , выполним дробно-линейное преобразование

$$\zeta = i \frac{1+z}{1-z}, \quad (3.16)$$

переводящее единичный круг в верхнюю полуплоскость.

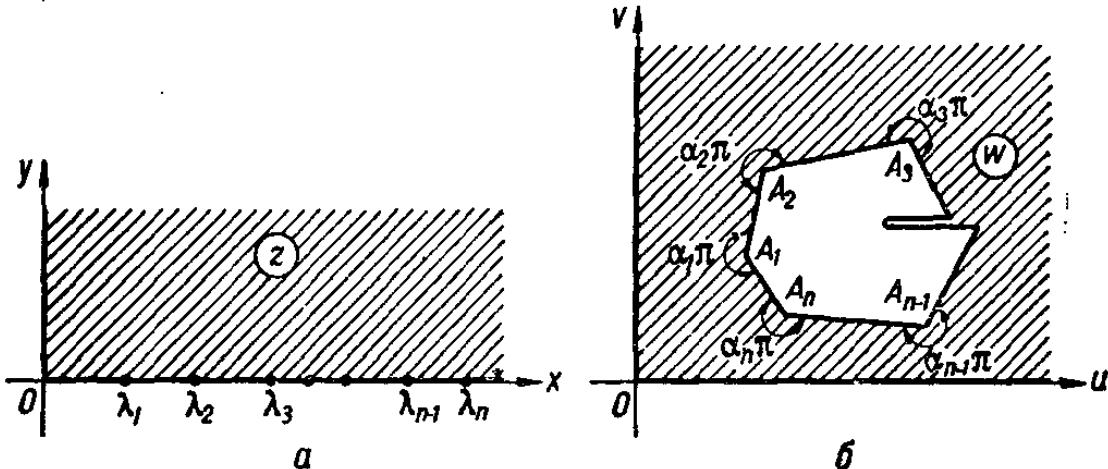


Рис. 75.

Применив формулу (3.12) к полуплоскости  $\operatorname{Im} \zeta \geq 0$  и произведя в ней замену переменных по формуле (3.16), после элементарных преобразований с учетом соотношения (3.13) получим окончательно

$$w = C' \int_0^z \prod_{j=1}^n (z - \lambda'_j)^{\alpha_j - 1} dz + C'_1, \quad (3.17)$$

где лежащие на единичной окружности точки  $\lambda'_j$  определяются по принадлежащим действительной оси плоскости  $\zeta$  точкам  $\lambda_j$  по следующим формулам:

$$\lambda'_j = \frac{\lambda_j - i}{\lambda_j + i}, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.18)$$

В частности, если  $n$ -угольник  $\Delta$  правильный с центром в начале координат плоскости  $w$ , то можно показать, что функция, конформно отображающая единичный круг  $|z| \leq 1$  на этот  $n$ -угольник, имеет вид

$$w = C \int_0^z \left[ (z - 1) \left( z - e^{i \frac{2\pi}{n}} \right) \left( z - e^{i \frac{4\pi}{n}} \right) \dots \left( z - e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}} \right) \right] - \frac{2}{n} dz. \quad (3.19)$$

Формула Кристоффеля — Шварца (3.12) легко распространяется и на случай, когда требуется отобразить верхнюю полуплоскость  $z$  на внешность ограниченного  $n$ -угольника с внешними углами, равными  $\alpha_k\pi$  (рис. 75, а, б). Различие между этим и рассмотренным в п. 33 случаями заключается в том, что в некоторой конечной точке  $a$ , соответствующей бесконечно удаленной точке внешности многоугольника, функция  $g(z)$  имеет полюс первого порядка. Так же как и в п. 33, мож-

но показать, что функция  $g(z)$  в каждой точке  $\lambda_k$  имеет полюс первого порядка с вычетом, равным  $\alpha_k - 1$ , а в точках  $a$  и  $\bar{a}$  имеет полюсы первого порядка с вычетами, равными — 2. Поэтому для  $g(z)$  справедливо представление

$$g(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{z - \lambda_k} - \frac{2}{z - a} - \frac{2}{z - \bar{a}}.$$

Отсюда получаем исходную функцию

$$\omega = C \int_0^z \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} \frac{dz}{(z - a)^2 (z - \bar{a})^2} + C_1, \quad (3.20)$$

конформно отображающую верхнюю полуплоскость на внешность многоугольника.

**35. О константах интеграла Кристоффеля — Шварца. Интеграл Кристоффеля — Шварца (3.12)**

$$\omega = C \int_0^z \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} dz + C_1,$$

содержащий  $2n + 2$  постоянных величин (констант)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; C$  и  $C_1$ , реализует конформное отображение верхней полуплоскости на некоторый многоугольник. Для того чтобы интеграл (3.12) совершил конформное отображение верхней полуплоскости на заданный многоугольник, необходимо константы  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}; C$  и  $C_1$  определить после того, как зафиксированы константы  $\lambda_1, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ .

Задача определения констант по заданным вершинам многоугольника, которая, главным образом, и встречается на практике, является одной из труднейших задач теории конформных отображений. Откладывая подробное рассмотрение этой задачи до следующих пунктов, выясним здесь, какую роль играют константы интеграла Кристоффеля — Шварца, а также влияние на величину констант  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  выбора нормировки.

Константы  $\alpha_k$ , удовлетворяющие соотношению (3.13) и характеризующие величины внутренних углов многоугольника, всегда известны, как только в плоскости  $\omega$  задан многоугольник, на который требуется отобразить при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца верхнюю полуплоскость  $z$ .

Для выяснения роли, какую играют константы  $C$  и  $C_1$ , заменим отображение (3.12) двумя отображениями

$$\omega = \int_0^z \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k)^{\alpha_k - 1} dz; \quad (3.21)$$

$$\omega = C\omega + C_1. \quad (3.22)$$

Функция (3.21) реализует конформное отображение верхней полуплоскости на некоторый многоугольник  $\Delta^{(0)}$ . Отображение (3.22) является линейным. Из него и выясняется роль констант  $C$  и  $C_1$ . Константа  $C$  осуществляет поворот на угол, равный  $\arg C$ , и растяжение в  $|C|$  раз, константа  $C_1$  — сдвиг на вектор  $C_1$ . Все возможные изменения констант  $C$  и  $C_1$ , согласно отображению (3.22), приводят к получению на плоскости  $\omega$  бесконечного множества многоугольников, подобных

многоугольнику  $\Delta^{(0)}$ . Фиксируя значения  $C$  и  $C_1$ , мы выделяем из этого множества один многоугольник.

Очевидно, что при выбранной нормировке изменение констант  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}$  приводит к изменению относительных длин сторон ограниченного многоугольника, т. е. отношения

$$\frac{l_k}{l_1} = d_k, \quad (3.23)$$

где  $l_1$  и  $l_k$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ) — длины сторон многоугольника, перестают сохраняться хотя бы для одного значения  $k$ . Так как ограниченный многоугольник с фиксированными углами определяется с точностью до подобия отношениями длин сторон, то константы  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}$  являются корнями следующей системы уравнений:

$$\frac{l_k}{l_j} = \frac{|A_k - A_{k+1}|}{|A_j - A_{j+1}|} = \frac{\int_{\lambda_j}^{\lambda_{k+1}} \prod_{v=1}^n |z - \lambda_v|^{\alpha_{v-1}} dz}{\int_{\lambda_j}^{\lambda_{k+1}} \prod_{v=1}^n |z - \lambda_v|^{\alpha_{v-1}} dz}, \quad (3.24)$$

где  $k, j = 1, 2, \dots, n$ ; а  $\lambda_1, \lambda_{n-1}, \lambda_n$  — фиксированы. При решении этой системы можно взять любые  $n - 3$  линейно-независимые уравнения.

Рассмотрим влияние на величину констант выбора нормировки. Изменение нормировки за счет выбора вершины  $A_1$  произвольного неправильного  $n$ -угольника  $\Delta$  (при отображении на него при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца полу平面  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ) приводит к изменению величин констант  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}$  при фиксированных значениях  $\lambda_1, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ .

Пусть  $\lambda_1 = 0; \lambda_n = \infty$  — фиксированы. Произведя циклическую перестановку вершин  $n$ -угольника  $\Delta$ , перейдем к транспонированному  $n$ -угольнику  $\Delta^{(1)}$ , у которого

$$l_1^{(1)} = l_2, \quad l_2^{(1)} = l_3, \quad \dots, \quad l_n^{(1)} = l_1.$$

На плоскости  $z$  переход к транспонированному  $n$ -угольнику  $\Delta^{(1)}$  будет соответствовать дробно-линейному преобразованию

$$z^{(1)} = 1 - \frac{\lambda_2}{z}, \quad (3.25)$$

которое образы вершин  $z_1 = 0, z_2 = \lambda_2, z_n = \infty$  переводят в точки  $z_1^{(1)} = \infty, z_2^{(1)} = 0, z_n^{(1)} = 1$ . Полагая в (3.25)  $z^{(1)} = \lambda_k^{(1)}, z = \lambda_{k+1}$ , получаем систему для определения транспонированных констант через исходные

$$\lambda_k^{(1)} = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{k+1}} \quad (k = 2, 3, \dots, n-2). \quad (3.26)$$

Используя систему (3.26), можно доказать, что путем циклической перестановки вершин произвольного неправильного  $n$ -угольника всегда можно выбрать такую нормировку, чтобы константы  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}$  интеграла Кристоффеля — Шварца, отображающего верхнюю полу-plane на этот многоугольник, были меньше соответствующих кон-

стант  $\lambda_2^*, \lambda_3^*, \dots, \lambda_{n-2}^*$  интеграла Кристоффеля — Шварца, отображающего верхнюю полуплоскость на правильный  $n$ -угольник, при фиксированных значениях  $\lambda_1 = \lambda_1^*, \lambda_{n-1} = \lambda_{n-1}^*, \lambda_n = \lambda_n^*$ .

**36. Определение констант в случае правильного многоугольника.** В предыдущем пункте была получена система (3.26), выражающая транспонированные константы через исходные. Так как для правильных многоугольников циклическая перестановка вершин не влияет на величину констант, то из равенств (3.26) получаем следующую систему для определения констант  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}$  правильного  $n$ -угольника:

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \\ \lambda_3 &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_4}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ \lambda_{n-3} &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n-2}}, \\ \lambda_{n-2} &= 1 - \lambda_2.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Используя эту систему, покажем, что константы  $\lambda_k$  и  $\lambda_{n-k}$  ( $k \neq \frac{n}{2}, n$  — четно) расположены симметрично относительно середины отрезка  $[0, 1]$ , а для  $n$ -угольников с четным числом сторон  $\lambda_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}$ . Из первого и по-

следнего уравнений системы (3.27) имеем  $\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-2}} = \lambda_3$ . Подставляя в пред-

последнее уравнение вместо  $\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-2}}$  получение значение, будем иметь

$\lambda_{n-3} = 1 - \lambda_3$ . Из второго и полученного предпоследнего уравнений имеем  $\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-3}} = \lambda_4$ . Подставляя в  $(n - 5)$ -е уравнение вместо  $\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-3}}$  его значение, имеем  $\lambda_{n-4} = 1 - \lambda_4$ . Продолжая этот процесс, убеждаемся, что соотношение  $\lambda_{n-k} = 1 - \lambda_k$  справедливо для любого индекса  $k$ , что и требовалось показать.

Из системы (3.27) видно, что это обстоятельство облегчает определение констант для правильных  $n$ -угольников, имеющих четное число сторон, так как в этом случае при определении  $\lambda_2$  необходимо найти наименьший положительный корень полинома степени  $E\left(\frac{n}{4}\right)^*$ , а не степ-

пени  $\frac{n-1}{2}$ , как для правильных  $n$ -угольников, имеющих нечетное число сторон. После определения  $\lambda_2$  легко находим (для любого правильного многоугольника) остальные константы, решая цепочку линейных уравнений.

В табл. I приведены точные значения констант для правильных многоугольников, причем во всех случаях при вычислении  $\lambda_2$  был использован полином не выше второй степени.

---

\* $E\left(\frac{n}{4}\right)$  — целая часть числа  $\frac{n}{4}$ .

Таблица 1

Правильные многоугольники	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6 =$	$\lambda_7$	$\lambda_8$
Четырехугольник	$\frac{1}{2}$						
Пятиугольник	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$					
Шестиугольник	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$				
Восьмиугольник	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{1}{2}$	$2-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
Десятиугольник	$\frac{5-1-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$

Если при вычислении  $\lambda_2$  необходимо использовать полином выше второй степени, то определять константы  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-2}$  из системы (3.27) нецелесообразно. В этом случае лучше определить константы подынтегральной функции следующим образом.

Воспользуемся функцией (3.19), конформно отображающей единичный круг  $|z| \leq 1$  на правильный  $n$ -угольник с центром в начале координат. При помощи дробно-линейного преобразования

$$z = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}, \quad (3.28)$$

переводящего верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} \zeta \geq 0$  в единичный круг  $|z| \leq 1$ , интеграл (3.19) приводится к интегралу

$$w = C' \int_0^{\zeta} \prod_{j=1}^{n-1} (\zeta - \lambda_j)^{-\frac{2}{n}} d\zeta + C'_1, \quad (3.29)$$

реализующему конформное отображение верхней полуплоскости на правильный  $n$ -угольник. Константы  $\lambda_j$  полученного интеграла (3.29) равны

$$\lambda_j = -\operatorname{ctg} \frac{j\pi}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (3.30)$$

**37. Определение констант в случае неправильного четырехугольника.** Задача определения констант интеграла Кристоффеля — Шварца возникает при конформном отображении неправильного  $n$ -угольника, когда  $n \geq 4$ . В этом пункте укажем один метод определения неизвестных констант для случая четырехугольника.

Пусть вершинам четырехугольника  $A_1, A_2, A_3, A_4$  при отображении соответствуют точки действительной оси  $0, \lambda, 1, \infty$ . Вычислим конечные длины  $l_k = |A_{k+1} - A_k|$  сторон четырехугольника.

Согласно (3.12),

$$l_1 = |C| (-1)^{1-\alpha_2} \int_0^\lambda z^{\alpha_1-1} (z-\lambda)^{\alpha_2-1} (1-z)^{\alpha_3-1} dz.$$

Разлагая  $(1-z)^{\alpha_3-1}$  в биномиальный ряд и выполняя почленное интегрирование, получим

$$l_1 = |C| (-1)^{1-\alpha_2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_3^{(m)} \int_0^\lambda z^{m+\alpha_1-1} (z-\lambda)^{\alpha_2-1} dz,$$

где

$$\alpha_3^{(0)} = 1, \quad \frac{\alpha_3^{(m+1)}}{\alpha_3^{(m)}} = \frac{m+1-\alpha_3}{m+1}.$$

Для вычисления

$$\int_0^\lambda z^{m+\alpha_1-1} (z-1)^{\alpha_2-1} dz$$

воспользуемся формулой (3.110). Тогда

$$\begin{aligned} l_1 &= |C| (-1)^{1-\alpha_2} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_3^{(m)} \frac{(-\lambda)^{\alpha_2-1}}{m+\alpha_1} \lambda^{m+\alpha_1} \times \\ &\quad \times F(1-\alpha_2, m+\alpha_1; m+1+\alpha_1; 1) = \\ &= |C| \lambda^{\alpha_1+\alpha_2-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_3^{(m)}}{m+\alpha_1} \frac{\Gamma(m+1+\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(m+\alpha_1+\alpha_2)} \lambda^m. \end{aligned}$$

Выполнив очевидные преобразования, окончательно получим

$$l_1 = |C| \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \lambda^{\alpha_1+\alpha_2-1} F(1-\alpha_3, \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2; \lambda).$$

Остальные длины сторон четырехугольника вычисляются аналогично. При вычислении  $l_2, l_3, l_4$  надо воспользоваться соответственно разложениями

$$\begin{aligned} z^{\alpha_1-1} &= [1+(z-1)]^{\alpha_1-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_1^{(m)} (z-1)^m; \\ (z-\lambda)^{\alpha_2-1} &= z^{\alpha_2-1} \left(1 - \frac{\lambda}{z}\right)^{\alpha_2-1} = z^{\alpha_2-1} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_2^{(m)} \lambda^m z^{-m}; \quad (3.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z-\lambda)^{\alpha_2-1} &= (z-1)^{\alpha_2-1} \left(1 + \frac{1-\lambda}{z-1}\right)^{\alpha_2-1} = (z-1)^{\alpha_2-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \alpha_2^{(m)} \times \\ &\quad \times (1-\lambda)^m (z-1)^{-m}. \end{aligned}$$

Кроме того, для  $l_3$  и  $l_4$  после выполнения почлененного интегрирования при вычислении интеграла с бесконечным пределом от двух множителей надо пользоваться формулой (3.111).

Вычислив величины  $l_k$ , получаем систему уравнений для определения неизвестных констант  $\lambda$  и  $|C|$ .

$$\begin{aligned} l_1 &= |C| \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \lambda^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} F(1 - \alpha_3, \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2; \lambda); \\ l_2 &= |C| \frac{\Gamma(\alpha_2) \Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_2 + \alpha_3)} (1 - \lambda)^{\alpha_2 + \alpha_3 - 1} F(1 - \alpha_1, \alpha_3; \alpha_2 + \alpha_3; 1 - \lambda); \\ l_3 &= |C| \frac{\Gamma(\alpha_3) \Gamma(\alpha_4)}{\Gamma(\alpha_3 + \alpha_4)} F(1 - \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3 + \alpha_4; \lambda); \\ l_4 &= |C| \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_4)} F(1 - \alpha_2, \alpha_4; \alpha_1 + \alpha_4; 1 - \lambda). \end{aligned} \quad (3.32)$$

При решении системы (3.32) можно взять два любые линейно-независимые уравнения.

Рассмотрим случай простого \* четырехугольника. Будем считать, что при выбранной нормировке вершины четырехугольника  $A_1, A_2, A_3$  — конечные. Тогда, исключая  $|C|$  из первых двух уравнений системы (3.32) и выполняя преобразования, приходим к уравнению для определения константы  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{l_1 \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2) \Gamma(\alpha_3)}{l_2 \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2 + \alpha_3)} F(1 - \alpha_4, \alpha_2; \alpha_2 + \alpha_3; 1 - \lambda) - \\ &\quad - F(1 - \alpha_4, \alpha_2; \alpha_1 + \alpha_2; \lambda) = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Построим сходящийся итерационный процесс для решения полученного трансцендентного уравнения (3.33).

Исследуем функцию  $f(\lambda)$  на интервале  $(0, 1)$ . Рассмотрим случай, когда  $\alpha_4 < 1$ . Из уравнения (3.33) следует, что при увеличении  $\lambda$  на интервале  $(0, 1)$  отношение  $\frac{l_1}{l_2}$  тоже увеличивается. Если  $\alpha_3 + \alpha_4 \leq 1$ , то  $f(\lambda) \rightarrow +\infty$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , если же  $\alpha_3 + \alpha_4 > 1$ , то функция  $f(\lambda)$  непрерывна справа в точке  $\lambda = 0$ , и ее значение в этой точке равно

$$f(0) = \frac{l_1 \sin \pi \alpha_1}{l_2 \sin \pi (\alpha_1 + \alpha_2)} - 1 > 0.$$

Если  $\alpha_1 + \alpha_4 \leq 1$ , то  $f(\lambda) \rightarrow -\infty$  при  $\lambda \rightarrow 1$ , если же  $\alpha_1 + \alpha_4 > 1$ , то функция  $f(\lambda)$  непрерывна слева в точке  $\lambda = 1$ , и ее значение в этой точке равно

$$f(1) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)} \left[ \frac{l_1 \Gamma(\alpha_3)}{l_2 \Gamma(\alpha_2 + \alpha_3)} - \frac{\Gamma(1 - \alpha_2 - \alpha_3)}{\Gamma(1 - \alpha_3)} \right] < 0.$$

---

\* Простым называется  $n$ -угольник, имеющий не более одной вершины в бесконечно удаленной точке.

Заметим, что  $n$ -я производная функции  $f(\lambda)$  равна

$$f_{(\lambda)}^{(n)} = (-1)^n \frac{l_1 \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2) \Gamma(\alpha_3)}{l_2 \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2 + \alpha_3)} \prod_{k=1}^n \frac{(k - \alpha_4)(k + \alpha_2 - 1)}{k + \alpha_1 + \alpha_2 - 1} \times \\ \times F(n + 1 - \alpha_4, n + \alpha_2; n + \alpha_2 + \alpha_3; 1 - \lambda) - \\ - \prod_{k=1}^n \frac{(k - \alpha_4)(k + \alpha_2 - 1)}{k + \alpha_1 + \alpha_2 - 1} F(n + 1 - \alpha_4, n + \alpha_2; n + \alpha_1 + \alpha_2; \lambda).$$

Отсюда заключаем, что все нечетные производные отрицательны, а четные один раз меняют знак на интервале  $(0,1)$ , являясь положительными слева и отрицательными справа от своего нуля.

Случай, когда  $\alpha_4 > 1$ , исследуется аналогично. При увеличении  $\lambda$  на интервале  $(0,1)$  отношение  $\frac{l_1}{l_2}$  уменьшается  $f(0) < 0, f(1) > 0$ , все нечетные производные положительны, а четные меняют один раз знак на интервале  $(0,1)$ , являясь отрицательными слева и положительными справа от своего нуля.

Из двух рассмотренных случаев делаем вывод, что  $f(\lambda)$  обращается один раз в нуль на интервале  $(0,1)$ , а ее график имеет одну точку перегиба на этом интервале, причем кривая выпуклая (вниз) слева, вогнутая справа от точки перегиба, если  $\alpha_4 < 1$ , и вогнутая слева, выпуклая справа от этой точки, если  $\alpha_4 > 1$ .

Следовательно, при решении уравнения (3.33) можно пользоваться итерационным методом Ньютона [12]

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \frac{f(\lambda^{(k)})}{f'(\lambda^{(k)})} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.34)$$

Если для какого-либо приближения получаем  $\lambda^{(k+1)} < 0$  или  $\lambda^{(k+1)} > 1$ , то в качестве  $\lambda^{(k+2)}$  соответственно принимаем  $\lambda^{(k+2)} = \frac{\lambda^{(k)}}{2}$  или

$\lambda^{(k+2)} = \frac{1 + \lambda^{(k)}}{2}$ , продолжая далее вычисления по формуле (3.34).

В этом случае итерационный процесс будет сходящимся при любом выборе начального приближения  $\lambda^{(0)}$  из интервала  $(0,1)$ .

Следует отметить, что само уравнение (3.33) мало употребительно для определения  $\lambda$ , так как при значениях  $\lambda$ , близких к 0 или 1, один из гипергеометрических рядов будет медленно сходящимся. Поэтому приведем два эквивалентные ему уравнения, которые получены из него при помощи формул преобразования гипергеометрических функций и гамма-функций

$$f_1(\lambda) \equiv \left( \frac{\sin \pi \alpha_1}{\sin \pi (\alpha_1 + \alpha_2)} - \frac{l_2}{l_1} \right) \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \times \\ \times \frac{\Gamma(1 - \alpha_4)}{\Gamma(\alpha_3) \Gamma(1 - \alpha_3 - \alpha_4)} F(1 - \alpha_4, \alpha_2; \alpha_1 + \alpha_2; \lambda) + \\ + \lambda^{\alpha_3 + \alpha_4 - 1} F(1 - \alpha_1, \alpha_3; \alpha_3 + \alpha_4; \lambda) = 0; \quad (3.35)$$

$$f_2(\lambda) = \left( \frac{\sin \pi \alpha_3}{\sin \pi (\alpha_2 + \alpha_3)} - \frac{l_1}{l_2} \right) \frac{\Gamma(\alpha_2) \Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_2 + \alpha_3)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(1 - \alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_1 - \alpha_4)} F(1 - \alpha_4, \alpha_2; \alpha_2 + \alpha_3; 1 - \lambda) +$$

$$+ (1 - \lambda)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 4} F(1 - \alpha_3, \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_4; 1 - \lambda) = 0. \quad (3.36)$$

Если при выбранной нормировке  $\lambda < \frac{1}{2}$  и  $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 1$  (или 2), то при определении константы  $\lambda$  надо пользоваться уравнением (3.35), если же  $\lambda > \frac{1}{2}$  и  $\alpha_2 + \alpha_3 \neq 1$  (или 2), то уравнением (3.36). В каком именно из двух интервалов  $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  находится  $\lambda$  при выбранной нормировке, легко определяем, подставляя значение  $\lambda = \frac{1}{2}$  в уравнение (3.33), затем вычисляя из этого уравнения отношение длин сторон  $\frac{l_1}{l_2}$  и сравнивая полученное отношение  $\frac{l_1}{l_2}$  с этим же отношением при выбранной нормировке.

**Замечание.** Так как  $f_1(\lambda)$  и  $f_2(\lambda)$  допускают обращение, то из уравнений (3.35) и (3.36) можно получить два эквивалентных ряда для определения  $\lambda$ .

Уравнения системы (3.32) допускают обобщение в следующем смысле. Обозначим через  $A'_k$  либо конечную вершину, либо конечную противоположную вершину четырехугольника, а через  $l'_k$  — либо конечную длину стороны, либо конечную длину псевдостороны  $|A'_{k+1} - A'_k|$ . Тогда можно показать, что для  $l'_k$  имеют место равенства

$$l'_1 = \left| C \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \lambda^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} F(1 - \alpha_3, \alpha_1; \alpha_1 + \alpha_2; \lambda) \right|;$$

$$l'_2 = \left| C \frac{\Gamma(\alpha_2) \Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_2 + \alpha_3)} (1 - \lambda)^{\alpha_2 + \alpha_3 - 1} F(1 - \alpha_1, \alpha_3; \alpha_2 + \alpha_3; 1 - \lambda) \right|;$$

$$l'_3 = \left| C \frac{\Gamma(\alpha_3) \Gamma(\alpha_4)}{\Gamma(\alpha_3 + \alpha_4)} F(1 - \alpha_2, \alpha_4; \alpha_3 + \alpha_4; \lambda) \right|;$$

$$l'_4 = \left| C \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_4)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_4)} F(1 - \alpha_2, \alpha_4; \alpha_1 + \alpha_4; 1 - \lambda) \right|. \quad (3.37)$$

Если  $\alpha_k$  равно нулю или целому отрицательному числу, то  $k$  и  $(k - 1)$ -е уравнения системы (3.37) теряют смысл, однако при помощи предельного перехода вместо них можно получить другое уравнение, в которое вместо  $l'_k$  и  $l'_{k+1}$  входит величина, равная расстоянию между параллельными сторонами четырехугольника.

## § 2. Эллиптические интегралы и функции

**38. Эллиптические интегралы.** Используя формулу Кристоффеля — Шварца (3.12) для отыскания отображающих функций, мы увидим, что последние далеко не всегда могут быть выражены через элементарные функции. Однако, в некоторых случаях неэлементарные, часто называемые *специальными*, функции изучены не хуже рассмотренных нами в предыдущих главах основных элементарных функций.

Так, например, интегралы вида

$$\int R(z, \sqrt{P_N(z)}) dz, \quad (3.38)$$

где  $R$  — *рациональная* функция переменных  $z$  и  $\sqrt{P_N(z)}$ , а  $P_N(z)$  — многочлен степени  $N \geq 3$ , не имеющий кратных корней, не выражается через элементарные функции. Тем не менее, в случае, когда  $P_N(z)$  — полином третьей и четвертой степени, интеграл (3.38) всегда выражается через элементарные функции и интегралы следующих трех видов:

$$F(z, m) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}, \quad (3.39)$$

$$E(z, m) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-m^2z^2}{1-z^2}} dz, \quad (3.40)$$

$$\Pi(z, m, n) = \int_0^z \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}, \quad (3.41)$$

где  $m$  и  $n$  предполагаются вещественными, причем  $0 < m < 1$ .

Интегралы вида (3.38) называются *эллиптическими* (при  $N > 4$  — *гиперэллиптическими* или *ультраэллиптическими*), а интегралы (3.39), (3.40) и (3.41) называются соответственно *эллиптическими интегралами I, II и III рода* с аргументом  $z$  и модулем  $m$  (в последнем случае еще и с параметром  $n$ ).

В последующих параграфах будет найден ряд отображающих функций, которые в конечном виде выражены через эллиптические интегралы I, II и III рода. В связи с этим изложим кратко основные положения из теории этих интегралов.

Введя в (3.39) — (3.41) новую переменную

$$z = \sin \Phi, \quad (3.42)$$

приведем их к следующей *тригонометрической форме Лежандра*:

$$F(\Phi, m) = \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \Phi}}, \quad (3.43)$$

$$E(\Phi, m) = \int_0^\Phi \sqrt{1-m^2 \sin^2 \Phi} d\Phi, \quad (3.44)$$

$$\Pi(\Phi, m, n) = \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{(1+n \sin^2 \Phi) \sqrt{1-m^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (3.45)$$

Величина  $\phi = \arcsin z$  называется *амплитудой*, а величина  $0 = \arcsin m$  называется *модулярным углом*. В дальнейшем всегда будем считать, что  $m \leq 1$ , ибо в случае, когда  $m > 1$  интегралы (3.39) — (3.41) легко можно свести к интегралам, у которых модуль будет уже меньше единицы. Для этого, произведя замену переменных через подстановку

$$z = \frac{t}{m}, \quad (3.46)$$

получим

$$\begin{aligned} F(z, m) &= \frac{1}{m} \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{\left(1 - \frac{t^2}{m^2}\right)(1 - t^2)}} = \\ &= m_1 \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - m_1^2 t^2)}} = m_1 F(t, m_1); \\ E(z, m) &= \frac{1}{m} \int_0^z \sqrt{\frac{1 - t^2}{\left(1 - \frac{t^2}{m^2}\right)}} dt = \\ &= \frac{1}{m} \int_0^z \frac{1 - t^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{t^2}{m^2}\right)(1 - t^2)}} dt = \\ &= \frac{1}{m} \int_0^z \frac{m^2 + m'^2 - t^2}{\sqrt{(1 - t^2)\left(1 - \frac{1}{m^2} t^2\right)}} dt = \\ &= \frac{1}{m} \int_0^z \frac{m'^2 dt}{\sqrt{(1 - t^2)\left(1 - \frac{1}{m^2} t^2\right)}} + \\ &+ m \int_0^z \frac{1 - \frac{t^2}{m^2}}{\sqrt{(1 - t^2)\left(1 - \frac{1}{m^2} t^2\right)}} dt = \frac{m'^2}{m} F(t, m_1) + m E(t, m_1); \\ \Pi(z, m, n) &= \int_0^z \frac{dz}{(1 + nz^2) \sqrt{(1 - z^2)(1 - m^2 z^2)}} = \\ &= \frac{1}{m} \int_0^z \frac{dt}{\left(1 + \frac{n}{m^2} t^2\right) \sqrt{\left(1 - \frac{t^2}{m^2}\right)(1 - t^2)}} = \\ &= m_1 \int_0^z \frac{dt}{(1 + n_1 t^2) \sqrt{(1 - t^2)(1 - m_1^2 t^2)}} = m_1 \Pi(t; m_1; n_1). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$F(z, m) = m_1 F(z, m_1); \quad (3.47)$$

$$E(z, m) = \frac{m'^2}{m} F(z, m_1) + m E(z, m_1); \quad (3.48)$$

$$\Pi(z, m, n) = m_1 \Pi(z, m_1, n), \quad (3.49)$$

где

$$m_1 = \frac{1}{m} < 1; \quad n_1 = \frac{n}{m^2}. \quad (3.50)$$

Если верхний предел в интегралах (3.39) — (3.41) равен единице или в соответствующих интегралах (3.47) — (3.49) верхний предел равен  $\frac{\pi}{2}$ , то эти интегралы называются *полными эллиптическими интегралами* соответственно I, II и III рода и обозначаются

$$K = K(m) = F(1, m) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}, \quad (3.51)$$

$$E = E(m) = E(1, m) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-m^2z^2}{1-z^2}} dz, \quad (3.52)$$

$$\Pi(m, n) = \Pi(1, m, n) = \int_0^1 \frac{dz}{(1+nz^2) \sqrt{(1-z^2)(1-\lambda^2z^2)}}. \quad (3.53)$$

Величина

$$m' = \sqrt{1-m^2} \quad (3.54)$$

называется *дополнительным модулем*, а соответствующие этому модулю полные эллиптические интегралы I и II рода обозначаются соответственно через  $K'$  и  $E'$ .

Интегралы  $K$ ,  $K'$ ,  $E$  и  $E'$  связаны между собой так называемой *зависимостью Лежандра* [41]:

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}. \quad (3.55)$$

Покажем, что в отдельных случаях эллиптические интегралы I, II и III рода могут быть выражены через соответствующие полные эллиптические интегралы I, II и III рода.

Если верхний предел эллиптического интеграла I рода равен  $\pm \frac{1}{m}$ , то

$$F\left(\pm \frac{1}{m}, m\right) = \pm K + iK. \quad (3.56)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} &= \int_0^{\pm 1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} + \\ &+ \int_{\pm 1}^{\pm \frac{1}{m}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} = \pm K + \int_{\pm 1}^{\pm \frac{1}{m}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}. \end{aligned}$$

Последний интеграл после замены переменного

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - m'^2 t^2}} \quad (3.57)$$

преобразуется к виду

$$\pm \frac{1}{m} \int_{\pm 1}^{\frac{1}{m}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2 z^2)}} = i \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m'^2 t^2)}} = iK'.$$

Для эллиптического интеграла II рода в случае, если верхний предел равен  $\pm \frac{1}{m}$ , справедливо соотношение

$$E\left(\pm \frac{1}{m}; m\right) = \pm E + i(K' - E'). \quad (3.58)$$

В самом деле, пользуясь подстановкой

$$z = \frac{\sqrt{1 - m'^2 t^2}}{m}, \quad (3.59)$$

получим

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1}{m} \int_0^{\frac{1}{m}} \sqrt{\frac{1-m^2 z^2}{1-z^2}} dz = \int_0^{\pm 1} \sqrt{\frac{1-m^2 z^2}{1-z^2}} dz + \\ & + \int_{\pm 1}^{\frac{1}{m}} \sqrt{\frac{1-m^2 z^2}{1-z^2}} dz = \pm E + i \int_{\pm 1}^{\frac{1}{m}} \sqrt{\frac{1-m^2 z^2}{z^2-1}} dz = \\ & = \pm E - i \int_1^0 \frac{mt^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m'^2 t^2)}} = \\ & = \pm E + i \int_0^1 \frac{1-(1-m'^2 t^2)}{\sqrt{(1-t^2)(1-m'^2 t^2)}} dt = \\ & = \pm E + i \left[ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m'^2 t^2)}} - \right. \\ & \left. - \int_0^1 \sqrt{\frac{1-m'^2 t^2}{1-t^2}} dt = \pm E + i(K' - E'). \right] \end{aligned}$$

Следует также заметить, что вычисление эллиптических интегралов I и II рода с пределами больше единицы всегда можно свести к вычислению соответствующих эллиптических интегралов I и II рода с пределами меньше единицы.

Если оба предела интегрирования  $a$  и  $b$  имеют один и тот же знак и по абсолютной величине больше  $\frac{1}{m}$ , то следует сделать следующую подстановку:

$$z = \frac{1}{mt}. \quad (3.60)$$

В этом случае

$$\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m^2t^2)}}, \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{\frac{1-m^2z^2}{1-z^2}} dz &= \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{\frac{1-m^2t^2}{1-t^2}} dt + \\ &+ \left. \frac{\sqrt{(1-t^2)(1-m^2t^2)}}{t} \right|_a^{b_1}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{mb} < 1; \quad b_1 = \frac{1}{ma} < 1. \quad (3.63)$$

Если же хотя бы одно из чисел  $-\frac{1}{m}, -1, 1, \frac{1}{m}$  лежит в интервале интегрирования  $(a, b)$ , то эллиптические интегралы I и II рода выражаются комплексными числами, причем те части интервала интегрирования, которые лежат в промежутках  $(-\infty, -\frac{1}{m})$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(\frac{1}{m}, \infty)$  дают вещественную часть интегралов, а те, которые находятся в промежутках  $(-\frac{1}{m}, -1)$  и  $(1, \frac{1}{m})$ , дают мнимую часть.

Покажем, как привести действительную и мнимую части интегралов к табличным, используя уже известную подстановку (3.59). Пусть  $0 < a < 1 < b < \frac{1}{m}$ , тогда для эллиптического интеграла I рода будем иметь

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} &= \int_a^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} + \\ &+ \int_1^b \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} - \\ &- \int_0^a \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} \pm i \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-m^2z^2)}} = \\ &= K(m) - F(a, m) \pm i \int_1^b \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-m^2z^2)}}. \end{aligned}$$

Последний интеграл после замены переменной преобразуется к виду

$$\pm i \int_1^b \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(1 - m^2 z^2)}} = \pm i \int_{b_1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - m'^2 t^2)}} = \\ = \pm i [K' - F(b, m')],$$

где

$$b_1 = \frac{\sqrt{1 - m^2 b^2}}{m'} \quad (0 < b_1 < 1). \quad (3.64)$$

Таким образом,

$$\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - m^2 z^2)}} = K(m) - F(a, m) \pm i [K'(m') - F(b_1, m')], \quad (3.65)$$

где  $b_1$  определяется формулой (3.64).

Аналогично поступим при вычислении действительной и мнимой частей эллиптического интеграла II рода с постоянными пределами

$a$  и  $b$  ( $0 < a < 1 < b < \frac{1}{m}$ ):

$$\int_1^b \sqrt{\frac{1 - m^2 z^2}{1 - z^2}} dz = E(m) - E(a, m) \pm i \int_1^b \sqrt{\frac{1 - m^2 z^2}{z^2 - 1}} dz.$$

Применяя к последнему интегралу подстановку (3.59), получим

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1 - m^2 z^2}{z^2 - 1}} dz = \int_{b_1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - m'^2 t^2)}} - \\ - \int_{b_1}^1 \sqrt{\frac{1 - m'^2 t^2}{1 - t^2}} dt = K' - F(b_1, m') - E' + E(b_1, m'),$$

где  $b_1$  определяется по (3.64).

Следовательно,

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1 - m^2 z^2}{1 - z^2}} dz = E - E(a, m) \pm i [K' - E' - F(b, m') + \\ + E(b_1, m')]. \quad (3.66)$$

Эллиптические интегралы, стоящие в правых частях соотношений (3.65) и (3.66), легко вычисляются по известным таблицам [32]. Выбор знака перед мнимой единицей в этих равенствах зависит от знака корня в левых частях равенств.

Эллиптический интеграл III рода с верхним пределом  $\pm \frac{1}{m}$  приводится к виду

$$\prod \left( \pm \frac{1}{m}, m, n \right) = \pm \prod (m, n) + i \frac{m^2}{n + m^2} \prod (m', n'), \quad (3.67)$$

где

$$n' = -\frac{nm'^2}{n + m^2}; \quad m' = \sqrt{1 - m^2}. \quad (3.68)$$

Соотношение (3.67) получим, если воспользуемся подстановкой (3.59), т. е.

$$\begin{aligned}
 & \pm \frac{1}{m} \int_0^{\pm \frac{1}{m}} \frac{dz}{(1+nz^2) \sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} = \\
 & = \int_0^{\pm 1} \frac{dz}{(1+nz^2) \sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} + \\
 & + \int_{\pm 1}^{\pm \frac{1}{m}} \frac{dz}{(1+nz^2) \sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} = \\
 & = \pm \Pi(m, n) + i \int_0^1 \frac{m^2 dt}{(n+m^2-nm'^2t^2) \sqrt{(1-t^2)(1-m'^2t^2)}} = \\
 & = \pm \Pi(m, n) + \frac{im^2}{n+m^2} \int_0^1 \frac{dt}{\left(1+\frac{-nm'^2}{n+m^2}t^2\right) \sqrt{(1-t^2)(1-m'^2t^2)}}.
 \end{aligned}$$

Полные сведения об эллиптических интегралах можно найти в [14]. В табл. 2 приведены значения полных эллиптических интегралов I и II рода и их отношений в случае действительного аргумента  $z$ , которые наиболее часто используются в различных приложениях эллиптических интегралов [26].

**39. Эллиптические функции Якоби.** Рассмотрим эллиптический интеграл I рода

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}. \quad (3.69)$$

Комплексная величина  $w$  интеграла (3.69) является функцией верхнего предела  $z$ . Обратим этот интеграл, т. е. будем рассматривать комплексную переменную  $z$  — верхний предел, — как функцию комплексного переменного  $w$ . В результате такого обращения аналитической функции  $w = F(z, m)$  получим обратную функцию  $z = f(w)$ , которая также будет аналитической.

Обычно рассматривают обращение эллиптического интеграла I рода в тригонометрической форме

$$w(\sin \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi}}. \quad (3.70)$$

Величина  $\phi$  как функция от  $w$  называется *амплитудой* величины  $w$  и обозначается

$$\phi = \operatorname{am} w \quad (\arcsin z = \operatorname{am} w). \quad (3.71)$$

**Таблицы полных эллиптических интегралов I и II рода**

$m^2$	$m$	$K$	$K'$	$\frac{K}{K'}$
0,00	0,00	1,5707963	$\infty$	0,00
0,0111	0,010 00	1,570 796		0,103 33
0,0101	0,0131 62	1,570 796		111 79
0,011	0,041	1,570 796		113 01
0,0181	0,0431 62	1,570 796		133 70
0,0171	0,031	796		0,148 23
0,0161	0,0331 62	796		166 30
0,0151	0,021	797		189 38
0,0141	0,0231 62	1,570 800		219 91
0,0131	0,01	1,570 836		262 17
0,0121	0,031 623	1,571 189	4,841133	0,324 55
0,01	0,100	1,5747456	3,6956374	0,4261
0,02	0,141	1,5787399	3,3541414	0,4706
0,03	0,173	1,5827803	3,1558749	0,5015
0,04	0,200	1,5868678	3,0161125	0,5261
0,05	0,224	1,5910035	2,9083372	0,5470
0,06	0,245	1,5951882	2,8207525	0,5655
0,07	0,265	1,5994232	2,7470730	0,5822
0,08	0,283	1,6037097	2,6835514	0,5976
0,09	0,300	1,6080486	2,6277733	0,6119
0,10	0,316	1,6124413	2,5780921	0,6254
0,11	0,332	1,6168891	2,5333345	0,6382
0,12	0,346	1,6213931	2,4926353	0,6504
0,13	0,360	1,6259548	2,4553380	0,6622
0,14	0,374	1,6305755	2,4209330	0,6735
0,15	0,387	1,6352567	2,3890165	0,6844
0,16	0,400	1,6399999	2,3592636	0,6951
0,17	0,412	1,6448065	2,3314086	0,7055
0,18	0,424	1,6496782	2,3052317	0,7156
0,19	0,436	1,6546167	2,2805491	0,7255
0,20	0,447	1,6596236	2,2572053	0,7352
0,21	0,458	1,6647008	2,2350678	0,7448
0,22	0,469	1,6698501	2,2140225	0,7542
0,23	0,479	1,6750734	2,1939709	0,7634
0,24	0,490	1,6803728	2,1748271	0,7726
0,25	0,500	1,6857504	2,1565156	0,7817
0,26	0,510	1,6912082	2,1389702	0,7906
0,27	0,520	1,6967486	2,1221319	0,7995
0,28	0,529	1,7023740	2,1059483	0,8083
0,29	0,539	1,7080867	2,0903727	0,8171
0,30	0,548	1,7138894	2,0753631	0,8258
0,31	0,557	1,7197848	2,0608816	0,8344
0,32	0,566	1,7257756	2,0468941	0,8431
0,33	0,574	1,7318648	2,0333694	0,8517
0,34	0,583	1,7380554	2,0202794	0,8603
0,35	0,592	1,7443506	2,0075984	0,8688

Таблица 2

и их отношений  $m$ —модуль эллиптических интегралов

$\frac{K'}{K}$	$E$	$E'$	$\frac{E}{K' - E'}$	$\frac{K' - E'}{E}$
$\infty$	1,5707963	1,00000	0,00000	$\infty$
	1,570 796			
	1,570 796			
	1,570 796			
	1,570 796			
	1,570 796			
	1,570 796			
	1,570 796			
	1,570 796			
	1,570 792			
	1,570 757			
3,081190	1,570 404	1,00217		
2,34681	1,5668619	1,0159935	0,58473	1,71020
2,12457	1,5629126	1,0285945	0,67206	1,48787
1,99388	1,5589482	1,03999469	0,73677	1,35722
1,90067	1,5549685	1,0505022	0,79109	1,26406
1,82798	1,5509734	1,0604737	0,83933	1,19147
1,76829	1,5469625	1,0699861	0,88359	1,13173
1,71754	1,5429357	1,0791214	0,92505	1,08102
1,61334	1,5388927	1,0879375	0,96445	1,03686
1,63414	1,5348335	1,0964775	1,00231	0,99770
1,59888	1,5307576	1,1047747	1,03871	0,96246
1,56679	1,5266650	1,1128556	1,07476	0,93023
1,53734	1,5225554	1,1207417	1,10982	0,90090
1,51010	1,5184285	1,1284507	1,14435	0,87413
1,48471	1,5142840	1,1359978	1,17849	0,84890
1,46094	1,5101218	1,1433958	1,21235	0,82508
1,43858	1,5059416	1,1506556	1,24601	0,80257
1,41744	1,5017431	1,1577870	1,27958	0,78125
1,39738	1,4975260	1,1647983	1,31312	0,76161
1,37829	1,4932901	1,1716971	1,34670	0,74239
1,36007	1,4890351	1,1784899	1,38038	0,72464
1,34263	1,4847606	1,1851829	1,41421	0,70721
1,32588	1,4804664	1,1917813	1,44826	0,69061
1,30978	1,4761521	1,1982901	1,48256	0,67453
1,29425	1,4718175	1,2047136	1,51716	0,65919
1,27926	1,4674622	1,2110560	1,55212	0,64433
1,26476	1,4630859	1,2173210	1,58746	0,63012
1,25070	1,4586882	1,2235118	1,62325	0,61614
1,23706	1,4542687	1,2296318	1,65952	0,60259
1,22381	1,4498271	1,2356838	1,69612	0,58962
1,21091	1,4453631	1,2416706	1,73369	0,57670
1,19834	1,4408761	1,2475945	1,77165	0,56445
1,18607	1,4363659	1,2534581	1,81031	0,55248
1,17409	1,4318319	1,2592634	1,84966	0,54054
1,16238	1,4272738	1,2650126	1,88976	0,52910
1,15092	1,4226911	1,2707075	1,93067	0,51787

$m^2$	$m$	$K$	$K'$	$\frac{K}{K'}$
0,36	0,600	1,7507538	1,9953028	0,87744
0,37	0,608	1,7572685	1,9833710	0,88600
0,38	0,616	1,7638984	1,9717832	0,89457
0,39	0,624	1,7706473	1,9605210	0,90315
0,40	0,632	1,7775194	1,9495677	0,91175
0,41	0,640	1,7845188	1,9389077	0,92037
0,42	0,648	1,7916501	1,9285263	0,92903
0,43	0,656	1,7989180	1,9184103	0,93771
0,44	0,663	1,8063276	1,9085470	0,94644
0,45	0,671	1,8138839	1,8989249	0,95522
0,46	0,678	1,8215927	1,8895331	0,96404
0,47	0,686	1,8294598	1,8803614	0,97293
0,48	0,693	1,8374914	1,8714002	0,98188
0,49	0,700	1,8456940	1,8626408	0,99090
0,50	0,707	1,8540747	1,8540747	1,00000
0,51	0,714	1,8626408	1,8456940	1,00918
0,52	0,721	1,8714002	1,8374914	1,01845
0,53	0,728	1,8803614	1,8294598	1,02782
0,54	0,735	1,8895331	1,8215927	1,03730
0,55	0,742	1,8989249	1,8138839	1,04688
0,56	0,748	1,9085470	1,8063276	1,05659
0,57	0,755	1,9184103	1,7989180	1,06643
0,58	0,762	1,9285263	1,7916501	1,07639
0,59	0,768	1,9389077	1,7845188	1,08652
0,60	0,775	1,9495677	1,7775194	1,09679
0,61	0,781	1,9605210	1,7706473	1,10723
0,62	0,787	1,9717832	1,7638984	1,11785
0,63	0,794	1,9833710	1,7572685	1,12867
0,64	0,800	1,9953028	1,7507538	1,13968
0,65	0,806	2,0075984	1,7443506	1,15092
0,66	0,812	2,0202794	1,7380554	1,16238
0,67	0,818	2,0333694	1,7318648	1,17409
0,68	0,825	2,0468941	1,7257756	1,18607
0,69	0,831	2,0608816	1,7197848	1,19834
0,70	0,837	2,0753631	1,7138894	1,21091
0,71	0,843	2,0903727	1,7080867	1,22381
0,72	0,848	2,1059483	1,7023740	1,23706
0,73	0,854	2,1221319	1,6967486	1,25070
0,74	0,860	2,1389702	1,6912082	1,26476
0,75	0,866	2,1565156	1,6857504	1,27926
0,76	0,872	2,1748271	1,6803728	1,29425
0,77	0,877	2,1939709	1,6750734	1,30978
0,78	0,883	2,2140225	1,6698501	1,32588
0,79	0,889	2,2350678	1,6647008	1,34263
0,80	0,894	2,2572053	1,6596236	1,36007
0,81	0,900	2,2805491	1,6546167	1,37829
0,82	0,905	2,3052317	1,6496782	1,39738
0,83	0,911	2,3314086	1,6048065	1,41744
0,84	0,917	2,3592636	1,6399999	1,43858

$\frac{K'}{K}$	$E$	$E'$	$\frac{E}{K' - E'}$	$\frac{K' - E'}{E}$
1,13968	1,4180834	1,2763499	1,97243	0,50710
1,12867	1,4134501	1,2819417	2,01510	0,49628
1,11735	1,4087908	1,2874843	2,05874	0,48657
1,10723	1,4041050	1,2929792	2,10340	0,47551
.09679	1,3993921	1,2984280	2,14914	0,46533
.08652	1,3946517	1,3038320	2,19604	0,45537
.07639	1,3898830	1,3091924	2,24416	0,44563
.06643	1,3850856	1,3145106	2,29357	0,43592
.05659	1,3802588	1,3197876	2,34435	0,42662
1,04688	1,3754020	1,3250245	2,39659	0,41726
,03730	1,3705145	1,3302225	2,45038	0,40816
.02782	1,3655957	1,3353824	2,50578	0,39904
.01845	1,3606448	1,3405054	2,56293	0,39017
,00918	1,3556611	1,3455922	2,62192	0,38139
.00000	1,3506439	1,3506439	2,68288	0,37272
1,99090	1,3455922	1,3556611	2,74592	0,36418
1,98188	1,3405540	1,3606448	2,81119	0,35572
1,97293	1,3353824	1,3655957	2,87882	0,34735
1,96404	1,3302225	1,3705145	2,94898	0,33910
1,95522	1,3250245	1,3754020	3,02185	0,33091
1,94644	1,3197876	1,3802588	3,09759	0,32279
1,93771	1,3145106	1,3850856	3,17643	0,31486
1,92903	1,3091924	1,3898830	3,25859	0,30689
1,92037	1,3038320	1,3946517	3,34430	0,29904
1,91175	1,2984280	1,3993921	3,43384	0,29121
1,90315	1,2929792	1,4041050	3,52750	0,28349
1,89457	1,2874843	1,4087908	3,62562	0,27582
1,88600	1,2819417	1,4134501	3,72854	0,26820
1,87744	1,2763499	1,4180834	3,83668	0,26062
1,86887	1,2707075	1,4226911	3,95035	0,25315
1,86030	1,2650126	1,4272738	4,07042	0,24570
1,85172	1,2592634	1,4318319	4,19708	0,23826
1,84312	1,2534581	1,4363659	4,33109	0,23089
1,83449	1,2475945	1,4408761	4,47313	0,22356
1,82583	1,2416706	1,4453631	4,64130	0,21547
1,81712	1,2356838	1,4498271	4,78466	0,20900
1,80836	1,2296318	1,4542687	4,95609	0,20178
1,79955	1,2235118	1,4586882	5,13950	0,19457
1,79066	1,2173210	1,4630859	5,33626	0,18741
1,78170	1,2110560	1,4674622	5,54797	0,18025
1,77265	1,2047136	1,4718175	5,77647	0,17317
1,76349	1,1982901	1,4761521	5,99381	0,16683
1,75422	1,1917813	1,4804664	6,29295	0,15891
1,74481	1,1851829	1,4847606	6,58654	0,15282
1,73526	1,1784899	1,4890351	6,90838	0,14476
1,72554	1,1716971	1,4932901	7,26289	0,13769
1,71562	1,1647983	1,4975260	7,65548	0,13063
1,70550	1,1577870	1,5017431	8,09283	0,12356
1,69513	1,1506556	1,5059416	8,58325	0,11651

$m^2$	$m$	$K$	$K'$	$\frac{K}{K'}$
0,85	0,922	2,3890165	1,6352567	1,46094
0,86	0,927	2,4209330	1,6305755	1,48471
0,87	0,933	2,4553380	1,6259548	1,51010
0,88	0,938	2,4926353	1,6213931	1,53734
0,89	0,943	2,5333345	1,6178891	1,56679
0,90	0,949	2,5780921	1,6124413	1,59888
0,91	0,954	2,6277733	1,6080486	1,63414
0,92	0,959	2,6835514	1,6037097	1,67334
0,93	0,964	2,7470730	1,5994232	1,71754
0,94	0,970	2,8207525	1,5951882	1,76829
0,95	0,975	2,9083372	1,5910035	1,82798
0,96	0,980	3,0161125	1,5868678	1,90067
0,97	0,985	3,1558749	1,5827803	1,99388
0,98	0,990	3,3541414	1,5787399	2,12457
0,99	0,995	3,6956374	1,5747456	2,34681
0,991	0,995490	3,747758		2,380513
0,992	5992	806076		418165
0,993	6494	872253		460829
0,994	6995	948723		510057
0,995	0,997497	4,039257		2,568252
0,996	7998	150179		639440
0,997	8499	293338		731172
0,998	8999	495347		860395
0,999	9500	841133		3,081190
1,000	1,000	—	1,5707963	—

Эллиптические функции Якоби определяются следующими соотношениями:

$$\operatorname{sn} w = \sin \varphi = \sin \operatorname{am} w = z; \quad (3.72)$$

$$\operatorname{cp} w = \cos \varphi = \cos \operatorname{am} w = \sqrt{1 - z^2}; \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dn} w &= \Delta \operatorname{am} w = \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{1 - m^2 (\sin \operatorname{am} w)^2} = \sqrt{1 - m^2 z^2}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Они называются соответственно *синус амплитуды* или *эллиптический синус*, *косинус амплитуды* или *эллиптический косинус* и *дельта амплитуды*.

Из определения эллиптических функций вытекают следующие основные зависимости:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 w + \operatorname{cn}^2 w &= 1; \\ \operatorname{dn}^2 w + m^2 \operatorname{sn}^2 w &= 1; \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\operatorname{tn} w = \frac{\operatorname{sn} w}{\operatorname{cp} w}.$$

Эллиптические функции Якоби обладают целым рядом замечательных свойств, некоторые из которых видны из табл. 3.

$\frac{K'}{K}$	$E$	$E'$	$\frac{E}{K' - E'}$	$\frac{K' - E'}{E}$
0,68449	1,1433958	1,5101218	9,13731	0,10944
0,67353	1,1359978	1,5142840	9,76854	0,10237
0,66221	1,1284507	1,5184285	10,49465	0,09529
0,65047	1,1207417	1,5225554	11,33921	0,08819
0,63825	1,1128556	1,5266650	12,33435	0,08107
0,62544	1,1047747	1,5307576	13,52503	0,07394
0,61195	1,0964775	1,5348335	14,97611	0,06677
0,59761	1,0879375	1,5388927	16,78476	0,05958
0,58223	1,0791214	1,5429357	19,10372	0,05235
0,56552	1,0699861	1,5469625	22,18705	0,04507
0,54705	1,0604737	1,5509734	26,49191	0,03775
0,52613	1,0505022	1,5549685	32,93183	0,03037
0,50154	1,0399469	1,5589482	43,63640	0,02292
0,47068	1,0285945	1,5629126	64,98863	0,01539
0,42611	1,0159935	1,5668619	128,87267	0,00776
	1,01463			
	01324			
	01181			
	01035			
	1,00885			
	730			
	569			
	400			
	217			
0,00000	1,0000000	1,5707963		0,00000

Приведенные в табл. 3 значения легко найти, если воспользоваться известными формулами сложения эллиптических функций

$$\operatorname{sn}(w_1 \pm w_2) = \frac{\operatorname{sn} w_1 \operatorname{cn} w_2 \operatorname{dn} w_2 \pm \operatorname{sn} w_1 \operatorname{cn} w_1 \operatorname{dn} w_1}{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 w_1 \operatorname{sn}^2 w_2}, \quad (3.76)$$

$$\operatorname{cp}(w_1 \pm w_2) = \frac{\operatorname{cp} w_1 \operatorname{cn} w_2 \pm \operatorname{sn} w_1 \operatorname{sn} w_2 \operatorname{dn} w_1 \operatorname{dn} w_2}{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 w_1 \operatorname{sn}^2 w_2}, \quad (3.77)$$

$$\operatorname{dn}(w_1 \pm w_2) = \frac{\operatorname{dn} w_1 \operatorname{dn} w_2 \pm m^2 \operatorname{sn} w_1 \operatorname{sn} w_2 \operatorname{cp} w_1 \operatorname{cp} w_2}{1 - m^2 \operatorname{sn}^2 w_1 \operatorname{sn}^2 w_2}. \quad (3.78)$$

Эллиптические функции Якоби являются двоякопериодическими функциями, причем функция  $\operatorname{sn} w$  имеет периоды  $4K$  и  $2iK'$ , функция  $\operatorname{cp} w$  — периоды  $4K$  и  $2K + 2iK'$  и функция  $\operatorname{dn} w$  — периоды  $2K$  и  $4iK'$ .

Подробное изложение свойств эллиптических функций можно найти в [14, 33].

В последующих параграфах излагаются способы и примеры непосредственного отыскания различных функций, дающих отображение полуплоскости на заданный многоугольник, либо обратно, отображающие многоугольник на полуплоскость или на другую какую-либо каноническую (простейшую) область.

Таблица 3

## Некоторые значения функций Якоби

$w$	$\operatorname{sn} w$	$\operatorname{cn} w$	$\operatorname{dn} w$
0	0	1	1
$\frac{K}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+m'}}$	$\sqrt{\frac{m'}{1+m'}}$	$\sqrt{m'}$
$K$	1	0	$m'$
$2K$	0	-1	1
$iK'$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$K+iK'$	$\frac{1}{m}$	$-i \frac{m'}{m}$	0
$2iK'$	0	-1	-1
$-w$	$-\operatorname{sn} w$	$\operatorname{cp} w$	$\operatorname{dn} w$
$iw$	$i \frac{\operatorname{sn}(w, m')}{\operatorname{cp}(w, m')}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(w, m')}$	$\frac{\operatorname{dp}(w, m')}{\operatorname{cp}(w, m')}$
$K+w$	$\frac{\operatorname{cp} w}{\operatorname{dp} w}$	$-i \frac{m' \operatorname{sn} w}{\operatorname{dn} w}$	$\frac{m'}{\operatorname{dn} w}$
$w+iK'$	$\frac{1}{m \operatorname{sn} w}$	$-i \frac{\operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w}$	$-i \frac{\operatorname{cp} w}{\operatorname{sn} w}$
$K+iK'+w$	$\frac{\operatorname{dp} w}{m \operatorname{cp} w}$	$-i \frac{m'}{m \operatorname{cp} w}$	$i \frac{m' \operatorname{sn} w}{\operatorname{cp} w}$

## § 3. Отображение двуугольников

40. Двуугольник  $\{0; 0\}$ . Рассмотрим простейший вид двуугольника — бесконечную горизонтальную полосу  $w$  (рис. 76 а, б).

Функцию, конформно отображающую верхнюю полуплоскость на заданный двуугольник  $\{0; 0\}$ , будем искать при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца (см. п. 33).

Соответствие точек  $a_k$  полуплоскости  $z$  вершинам  $A_k$  двуугольника  $w$ , значения координат этих точек (аффиксы) и величины углов  $a_k$  в рас-

рассматриваемом случае зададим нормировкой

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$+\infty$	0
2	0	$-\infty$	0
3	1	0	1

(3.79)

Ввиду того, что для нормировки отображения необходимо задать соответствие трех точек (см. п. 19), двуугольник  $\{0; 0\}$  дополним раз-

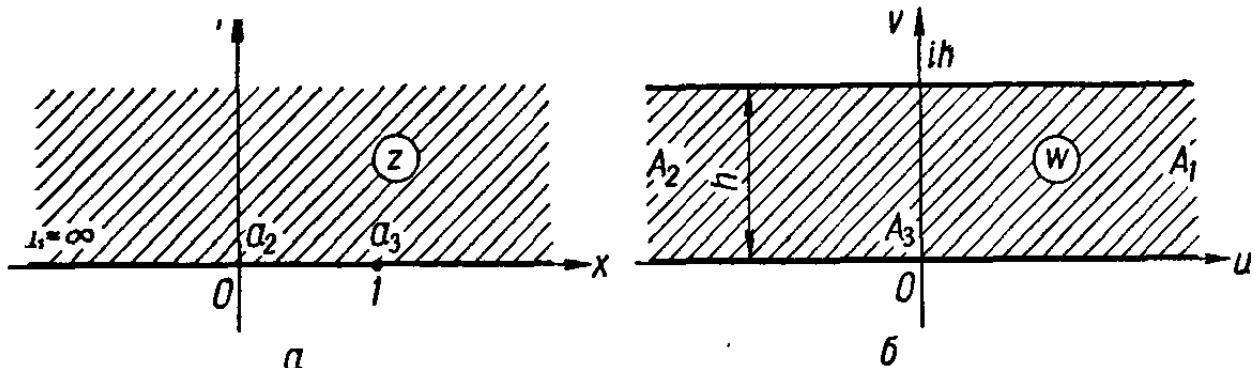


Рис. 76,

вернутым углом с вершиной  $A_3$  в начале координат, что совершенно не влияет на форму двуугольника.

Таким образом, учитывая (3.79), интеграл Кристоффеля — Шварца (3.12) запишем в следующем виде:

$$w = C \int_1^z (z - a_2)^{-1} (z - a_3)^0 dz + C_1 = C \int_1^z \frac{dz}{z} + C_1.$$

В соответствии точки  $k = 3$ , находим

$$0 = C \int_1^1 \frac{dz}{z} + C_1; \quad C_1 = 0;$$

поэтому

$$w = C \int_1^z \frac{dz}{z}. \quad (3.80)$$

После интегрирования (3.80) принимает вид

$$w = C \ln z. \quad (3.81)$$

Постоянная  $C$  в (3.81) определяет ширину и направление рассматриваемой полосы. Если  $C$  вещественно, то верхняя полуплоскость  $z$  отображается на горизонтальную полосу  $w$ , если же  $C$  — мнимое число, то полуплоскость преобразуется в вертикальную полосу.

В нашем случае положительная полусось плоскости  $z$  отображается в вещественную ось плоскости  $w$ , поэтому  $C$  должно быть вещественным числом. Найдем значение постоянной интеграла Кристоффеля — Шварца  $C$  при условии, что ширина полосы равна  $h$ .

Для этого воспользуемся известным положением теории конформных отображений [18], заключающимся в следующем: если при конформном отображении функцией  $w = f(z)$  точка  $z = a$  переходит в точку  $w = \infty$ , то образ полуокружности  $\gamma_r$  бесконечно малого радиуса  $r$  с центром в точке  $z = a$  с точностью до бесконечно малой, порядка высшего, чем  $r$ , представляет собой отрезок прямой линии.

В силу этого образом полуокружности  $\gamma_r$  в плоскости  $w$  будет отрезок прямой, соединяющий лучи  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$  и перпендикулярный к этим лучам (рис. 76 б).

Отсюда следует, что приращение  $\Delta w_0$  искомой функции  $w = C \ln z$  при обходе точки  $z = 0$  (по часовой стрелке) по полуокружности  $\gamma_r$ , уравнение которой можно записать в виде  $z = re^{i\theta}$  ( $\pi > \theta > 0$ ), с точностью до бесконечно малой  $O(r)$  равно разности значений действительной части  $u(x, y)$  соответственно на луче  $A_2A_3$  и на луче  $A_1A_2$ , т. е.

$$\Delta w_0 = -ih + O(r) \quad (r \rightarrow 0). \quad (3.82)$$

С другой стороны, найдем приращение функции вдоль полуокружности  $\gamma_r$ , воспользовавшись интегралом (3.80) и заменой  $z = re^{i\theta}$  ( $\pi > \theta > 0$ ):

$$\Delta w_0 = C \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = C \int_{\pi}^0 \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta$$

или

$$\Delta w_0 = -C\pi i \quad (r \rightarrow 0). \quad (3.83)$$

Сравнивая (3.82) и (3.83) \*, находим

$$C = \frac{h}{\pi}. \quad (3.84)$$

Подставляя найденное значение в (3.81), получим искомую отображающую функцию

$$w = \frac{h}{\pi} \ln z. \quad (3.85)$$

Функцию (3.85) можно записать в следующем удобном для практического использования виде:

$$w = \frac{h}{\pi} (\ln |z| + i \arg z), \quad (3.86)$$

причем  $0 \leq \arg z \leq \pi$  (так как путь интегрирования полостью лежит в верхней полуплоскости).

Постоянную  $C$  в рассмотренном случае значительно легче можно найти, если воспользоваться свойствами показательной функции.

Для этого запишем уравнение отрицательной полусоси в виде

$$z = re^{i\pi} \quad 0 < r < \infty. \quad (3.87)$$

Учитывая (3.87), заметим, что точке  $w = ih$  в плоскости  $z$  соответствует некоторая точка  $z = r_h e^{i\pi}$ . Подставив значения этих точек

\* В равенстве (3.82), как и в (3.83),  $O(r) = 0$  при любых значениях  $r$ , ибо функция (3.81) отображает  $\gamma_r$  в прямую  $u = \text{const}$ .

в соотношение (3.81), получим

$$\begin{aligned} w &= u + iv = ih = \ln z^C = \\ &= \ln |z|^C + iC \arg z = \ln r_h^C + iC\pi, \end{aligned}$$

откуда

$$r_h = 1; \quad C = \frac{h}{\pi}. \quad (3.88)$$

Таким образом, найдены не только значение постоянной  $C$ , но и прообраз точки  $w = ih$  в плоскости  $z$  — точка  $z = -1$ .

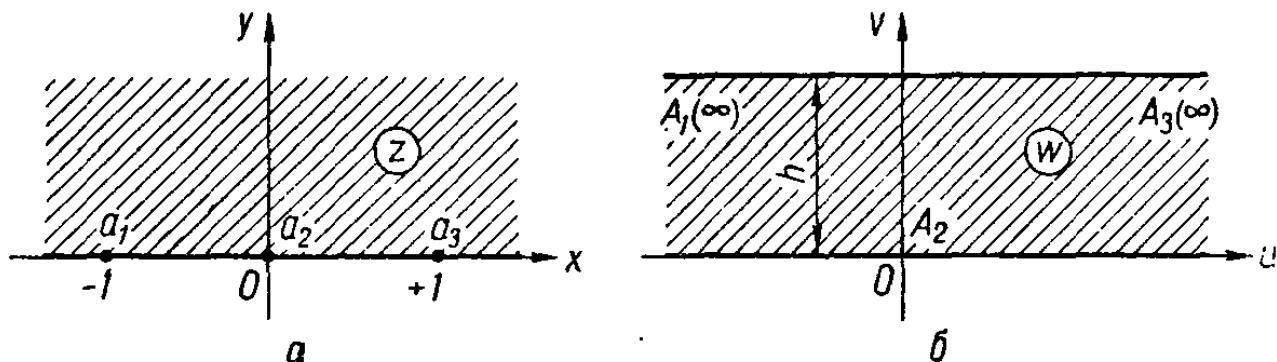


Рис. 77.

Последний способ определения значения постоянной  $C$ , хотя и прост, но не всегда применим, так как во многих примерах отображающая функция, как правило, имеет более сложный вид, чем в рассмотренном. Обращая (3.85), легко найти функцию, отображающую горизонтальную полосу  $w$  шириной  $h = \pi$  на верхнюю полуплоскость

$$z = e^w. \quad (3.89)$$

Такое отображение было исследовано нами в п. 26.

Теперь найдем отображение полуплоскости  $z$  на горизонтальную полосу  $w$ , изменив соответствие точек (рис. 77 а, б). В связи с этим примем следующее соответствие точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	-1	$-\infty$	0
2	0	0	1
3	1	$\infty$	0

(3.90)

Интеграл Кристоффеля — Шварца в этом случае запишется в виде

$$w = C \int_0^z (z+1)^{-1} (z-1)^{-1} dz = C \int_0^z \frac{dz}{z^2 - 1} \quad (3.91)$$

постоянная  $C_1 = 0$  из соответствия точек  $k = 2$ ). После интегрирования

$$w = -C \operatorname{Arth} z. \quad (3.92)$$

Постоянную  $C$  определим тем же способом, что и в первом случае. Интегрируя вдоль полуокружности  $\gamma_r$  с центром в точке  $z = -1$ , находим

$$\Delta w_{-1} = C \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^2 - 1} = \frac{C\pi i}{2} + Q(r); \quad (3.93)$$

с другой стороны,

$$\Delta w_{-1} = -hi + O(r). \quad (3.94)$$

Сравнивая (3.93) и (3.94), найдем

$$C = -\frac{2h}{\pi}. \quad (3.95)$$

Следовательно, искомая отображающая функция запишется в виде

$$w = \frac{2h}{\pi} \operatorname{Arth} z. \quad (3.96)$$

Обращая (3.96), легко находим функцию, отображающую заданную горизонтальную полуполосу  $w$  (рис. 77, б) на верхнюю полуплоскость  $z$

$$z = \operatorname{th} \frac{\pi}{2h} w. \quad (3.97)$$

Используя формулы (1.152), (1.156) и положив для определенности  $h = \frac{\pi}{2}$ , последнее равенство можно записать в виде следующих двух:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\operatorname{th} u (1 + \operatorname{tg}^2 v)}{1 + \operatorname{th}^2 u \operatorname{th}^2 v}; \\ y &= \frac{\operatorname{tg} v (1 - \operatorname{th}^2 u)}{1 + \operatorname{th}^2 u \operatorname{tg}^2 v}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

которые удобны для практического использования отображающей функции (3.97). Легко видеть, что формулы (3.98) при отображении контура рассмотренного двуугольника значительно упрощаются.

**41. Двуугольник**  $\left\{ \frac{p}{q}; -\frac{p}{q} \right\}$ . Пусть двуугольник образован двумя ие параллельными прямыми (рис. 78, б).

Отобразим верхнюю полуплоскость  $z$  (рис. 78, а) на внутренность заданного двуугольника  $\left\{ \frac{p}{q}, -\frac{p}{q} \right\}$  при следующей нормировке

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	$-\frac{p}{q}$
2	0	0	$+\frac{p}{q}$
3	1	1	1

(3.99)

Интеграл Кристоффеля — Шварца в этом случае имеет вид

$$w = C \int_0^z z^{\frac{p}{q}-1} (z-1)^0 dz + C_1 = C \int_0^z z^{\frac{p}{q}-1} dz + C_1$$

или после интегрирования

$$w = C \frac{q}{p} z^{\frac{p}{q}} + C_1.$$

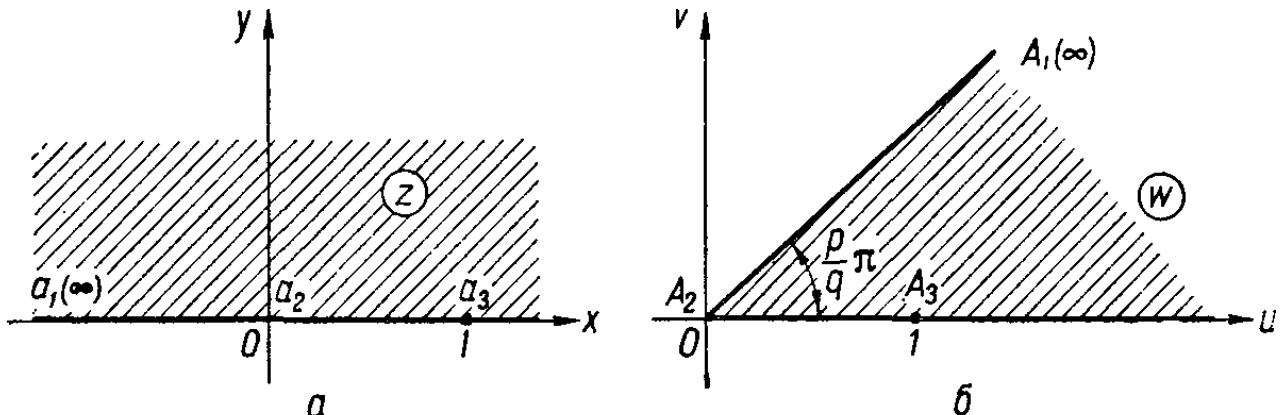


Рис. 78.

Из соответствия точек  $k = 2$  и  $k = 3$  находим

$$0 = 0 + C_1;$$

$$1 = C \frac{q}{p}; \quad C = \frac{p}{q},$$

после чего отображающая функция принимает следующий окончательный вид:

$$w = z^{\frac{p}{q}}. \quad (3.100)$$

Обратная функция

$$z = w^{\frac{q}{p}} \quad (3.101)$$

отображает внутренность заданного угла, равного величине  $\frac{p}{q}\pi$ , на верхнюю полуплоскость.

Функцию (3.100), а также (3.101), удобно записывать в тригонометрической форме

$$w = \rho^{\frac{p}{q}} \left( \cos \frac{p}{q} \varphi + i \sin \frac{p}{q} \varphi \right), \quad (3.102)$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi). \quad (3.103)$$

Рассмотренные примеры показывают, что уже в простейшем случае (случае двуугольника) задача отыскания явного вида функции, отображающей наперед заданные области, значительно труднее так называемой прямой задачи конформных отображений, рассмотренной нами в предыдущей главе.

## § 4. Отображение треугольников

**42. Произвольный треугольник.** Прежде чем рассмотреть ряд конкретных примеров, иллюстрирующих различные приемы отыскания отображающей функции, приведем общий метод нахождения функции, отображающей верхнюю полуплоскость  $z$  на произвольный треугольник при следующей нормировке:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	0	$A_1$	$\alpha_1$
2	1	$A_2$	$\alpha_2$
3	$\infty$	$A_3$	$1 - \alpha_1 - \alpha_2$

(3.104)

Вначале вычислим интеграл:

$$w = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (z - \lambda_1)^{\alpha_1-1} (z - \lambda_2)^{\alpha_2-1} dz, \quad (3.105)$$

где  $\alpha_1 > 0$ .

Чтобы проинтегрировать правую часть (3.105), поступим следующим образом. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд с центром в точке  $z = \lambda_1$

$$(z - \lambda_1)^{\alpha_1-1} (z - 1)^{\alpha_2-1} = \\ = (\lambda_1 - \lambda_2)^{\alpha_2-1} (z - \lambda_2)^{\alpha_1-1} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_2^{(m)} \left( \frac{z - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^m, \quad (3.106)$$

где  $\alpha_2^{(m)}$  — биномиальные коэффициенты, связанные рекуррентным соотношением

$$\alpha_2^{(0)} = 1, \quad \frac{\alpha_2^{(m+1)}}{\alpha_2^{(m)}} = \frac{m + 1 - \alpha_2}{m + 1}. \quad (3.107)$$

Подставив разложение (3.106) в интеграл (3.105), после интегрирования получим

$$\int_{\lambda_1}^z (z - \lambda_1)^{\alpha_1-1} (z - \lambda_2)^{\alpha_2-1} dz = \frac{1}{\alpha_1} (\lambda_1 - \lambda_2)^{\alpha_2-1} (z - \lambda_1)^{\alpha_1} \times \\ \times F \left( 1 - \alpha_2, \alpha_1; 1 + \alpha_1; \frac{z - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right), \quad (3.108)$$

где  $|z - \lambda_1| \leq |z - \lambda_2|$ .

Распространим теперь формулу (3.108) и на значения  $z$ , удовлетворяющие неравенству  $|z - \lambda_1| \geq |z - \lambda_2|$ .

Воспользовавшись формулой аналитического продолжения для гипергеометрической функции

$$\begin{aligned}
 & F(a, b; c; z) = \\
 & = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F(a, 1-c+a; 1-b+a; z^{-1}) + \\
 & + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F(b, 1-c+b; 1+b-a; z^{-1}), \\
 & |\arg(-z)| < \pi,
 \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
 F\left(1-\alpha_2, \alpha_1; 1+\alpha_1; \frac{z-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2-1} \left(\frac{z-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)^{\alpha_2-1} \times \\
 &\times F\left(1-\alpha_2, 1-\alpha_1-\alpha_2; 2-\alpha_1-\alpha_2; \frac{\lambda_2-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right) + \\
 &+ \frac{\Gamma(1+\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_1-\alpha_2)}{\Gamma(1-\alpha_2)} \left(\frac{z-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)^{-\alpha_1}.
 \end{aligned}$$

Подставляя полученное аналитическое продолжение в формулу (3.108), находим

$$\begin{aligned}
 \int_{\lambda_1}^z (z-\lambda_1)^{\alpha_1-1} (z-\lambda_2)^{\alpha_2-1} dz &= \frac{(z-\lambda_1)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\alpha_1+\alpha_2-1} \times \\
 &\times F\left(1-\alpha_2, 1-\alpha_1-\alpha_2; 2-\alpha_1-\alpha_2; \frac{\lambda_2-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right) + \\
 &+ (\lambda_1-\lambda_2)^{\alpha_1+\alpha_2-1} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_1-\alpha_2)}{\Gamma(1-\alpha_2)}, \quad (3.109)
 \end{aligned}$$

где

$$|z-\lambda_1| \geq |\lambda_2-\lambda_1|.$$

Объединяя формулы (3.108) и (3.109), получим следующую формулу для вычисления интеграла (3.105):

$$\begin{aligned}
 & \int_{\lambda_1}^z (z-\lambda_1)^{\alpha_1-1} (z-\lambda_2)^{\alpha_2-1} dz = \\
 & = \begin{cases} \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^{\alpha_2-1}}{\alpha_1} (z-\lambda_1)^{\alpha_1} F\left(1-\alpha_2, \alpha_1; 1+\alpha_1; \frac{z-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) \\ \text{при } \frac{|z-\lambda_1|}{|\lambda_2-\lambda_1|} \leq 1; \\ \frac{(z-\lambda_1)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\alpha_1+\alpha_2-1} F\left(1-\alpha_2, 1-\alpha_1-\alpha_2; 2-\alpha_1-\alpha_2; \frac{\lambda_2-\lambda_1}{z-\lambda_1}\right) + \\ + (\lambda_1-\lambda_2)^{\alpha_1+\alpha_2-1} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_1-\alpha_2)}{\Gamma(1-\alpha_2)} \text{ при } \frac{|z-\lambda_1|}{|\lambda_2-\lambda_1|} \geq 1. \end{cases} \quad (3.110)
 \end{aligned}$$

Замечание. Очевидно, что для вычисления интеграла

$$\int_{\infty}^z (z - \lambda_1)^{\alpha_1-1} (z - \lambda_2)^{\alpha_2-1} dz \quad (\alpha_1 + \alpha_2 < 1)$$

справедлива формула

$$\int_{\infty}^z (z - \lambda_1)^{\alpha_1-1} (z - \lambda_2)^{\alpha_2-1} dz =$$

$$= \begin{cases} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^{\alpha_2-1}}{\alpha_1} (z - \lambda_1)^{\alpha_1} F \left( 1 - \alpha_2, \alpha_1; 1 + \alpha_1; \frac{z - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) - \\ - (\lambda_1 - \lambda_2)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(1 - \alpha_1 - \alpha_2)}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \text{ при } \frac{|z - \lambda_1|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \leq 1; \\ \frac{(z - \lambda_1)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} F \left( 1 - \alpha_2, 1 - \alpha_1 - \alpha_2; 2 - \alpha_1 - \alpha_2; \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{z - \lambda_1} \right) \\ \text{при } \frac{|z - \lambda_1|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} \geq 1. \end{cases} \quad (3.111)$$

Возьмем теперь произвольный треугольник  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ , лежащий в плоскости  $w$ . При отображении на него верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z \geq 0$  зададим нормировку (3, 104), при которой вершина  $A_1$  принимается конечной. Тогда, согласно (3.110), отображающая функция принимает вид

$$w = \begin{cases} C \frac{(-1)^{\alpha_2-1}}{\alpha_1} z^{\alpha_1} F(1 - \alpha_2, \alpha_1; 1 + \alpha_1; z) + C_1 \text{ при } |z| \leq 1, \\ C \left[ \frac{z^{-\alpha_3}}{-\alpha_3} F(1 - \alpha_2, \alpha_3; 1 + \alpha_3; \frac{1}{z}) + \right. \\ \left. + (-1)^{-\alpha_3} \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_3)}{\Gamma(1 - \alpha_2)} + C_1 \right] \text{ при } |z| \geq 1. \end{cases} \quad (3.112)$$

Остается еще вычислить постоянные  $C$  и  $C_1$ . Подставляя в отображающую функцию (3.112) значения  $z = 0$  и  $w = A_1$ , соответствующие принятой нормировке, находим

$$C_1 = A_1. \quad (3.113)$$

При определении  $C$  используем контурный интеграл

$$I_s = \oint_S z^{\alpha_1-1} (z - 1)^{\alpha_2-1} dz,$$

в котором интегрирование производится по замкнутому контуру  $S$ , исходящему из точки  $z = 0$ , огибающему точку  $z = 1$  и возвращающемуся по лежащему в нижней полуплоскости пути в точку  $z = 0$  (рис. 79, а). Постоянная  $C$  выражается через этот интеграл по формуле

$$C = \frac{\bar{A}_1 - A_1}{I_s}, \quad (3.114)$$

где  $\bar{A}_1$  — точка, симметричная с вершиной  $A_1$  относительно стороны  $A_2A_3$ .

Если  $\alpha_2$  отлично от нуля и целого отрицательного числа (рис. 79, б), то при вычислении интеграла  $I_s$  воспользуемся аналитическим продол-

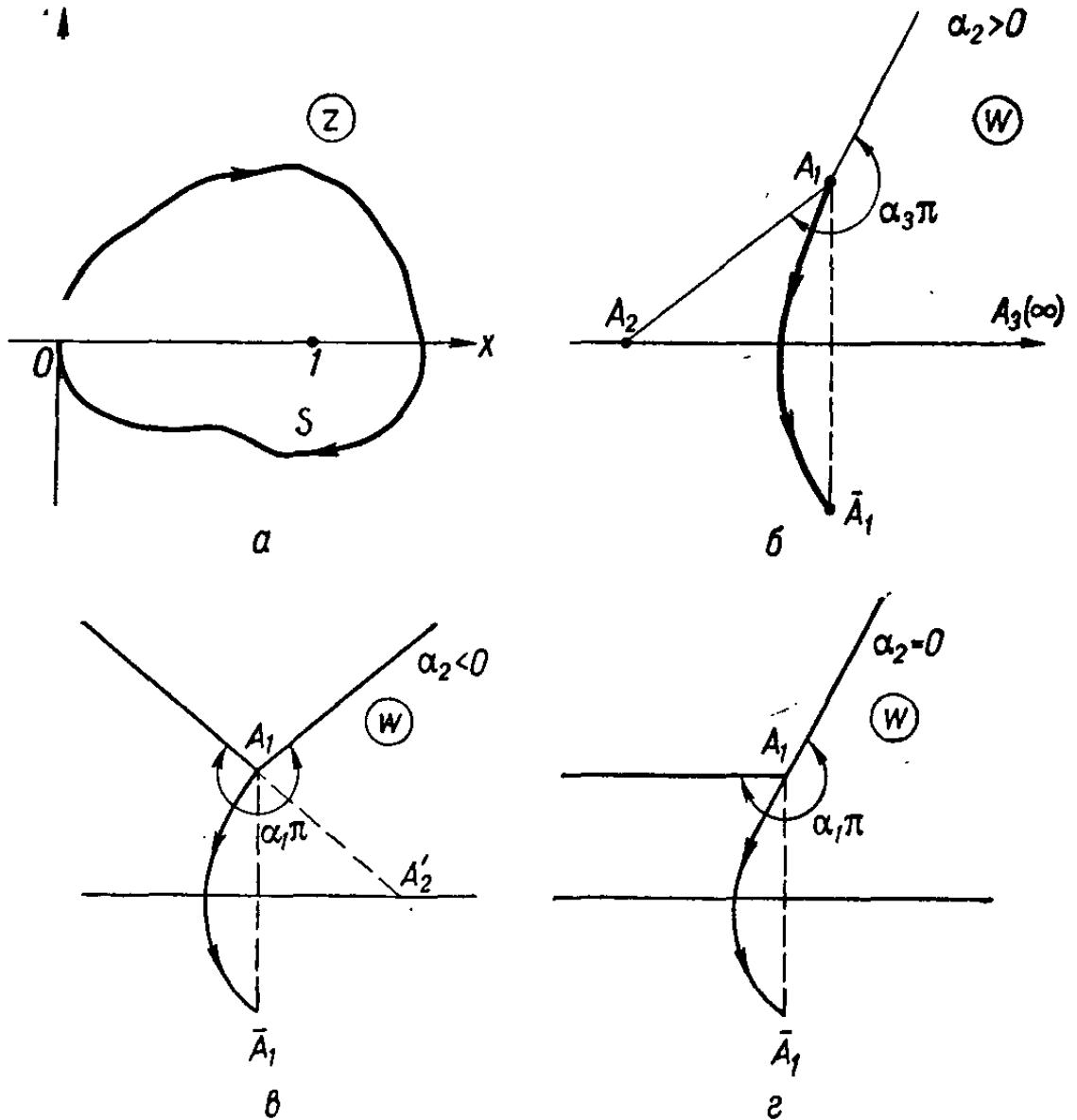


Рис. 79.

жением функции  $F(1 - \alpha_2, \alpha_1; 1 + \alpha_1; z)$  по формуле

$$\begin{aligned}
 F(a, b; c; -z) &= \\
 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-z) + \\
 &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c-a-b+1; \\
 &\quad 1-z), \\
 |\arg(1-z)| &< \pi.
 \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}
 &\frac{(-1)^{\alpha_2-1}}{\alpha_1} z^{\alpha_1} F(1 - \alpha_2, \alpha_1; 1 + \alpha_1; z) = \\
 &= (-1)^{\alpha_2-1} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} + \frac{(z-1)^{\alpha_2}}{\alpha_2} F(1 - \alpha_1, \alpha_2; 1 + \alpha_2; 1-z).
 \end{aligned}$$

Учитывая, что аргумент  $z - 1$  после полного обхода замкнутого контура  $S$  получает приращение  $-2\pi$ , находим

$$I_s = (-1)^{\alpha_2} \frac{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} (e^{-2\pi\alpha_2 i} - 1). \quad (3.115)$$

Согласно (3.114) и (3.115),

$$\begin{aligned} C &= (-1)^{-\alpha_2} \frac{\bar{A}_1 - A_1}{e^{-2\pi\alpha_2 i} - 1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} = \\ &= (-1)^{-\alpha_2} (A_1 - A'_2) \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}, \end{aligned} \quad (3.116)$$

где  $A'_2$  обозначает либо вершину  $A_2$ , когда она конечна (рис. 79, б), либо противоположную ей вершину (рис. 79, в), когда  $A_2$  лежит в бесконечности. Подставляя в (3.112) вместо  $C_1$  и  $C$  их значения из (3.113) и (3.116), получаем функцию, отображающую верхнюю полуплоскость

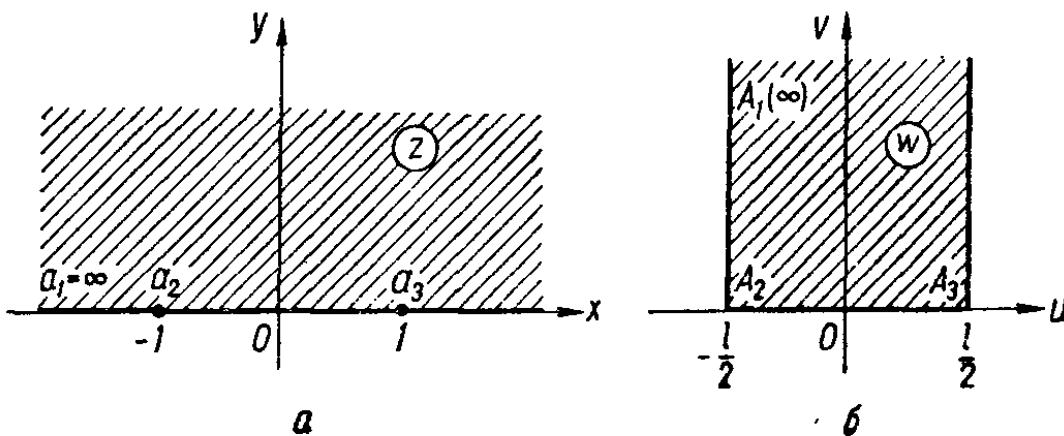


Рис. 80.

на треугольник (у которого при выбранной нормировке  $A_1$  — конечная вершина, а  $\alpha_2$  отлично от нуля и целого отрицательного числа), в виде

$$w = \begin{cases} (\bar{A}_1 - A_1) \frac{\Gamma(1 - \alpha_3)}{\Gamma(1 + \alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} z^{\alpha_1} F(1 - \alpha_2, \alpha_1; 1 + \alpha_1; z) + A_1 \\ \text{при } |z| \leq 1, \\ (-1)^{1-\alpha_2} (A'_2 - A_1) \frac{\Gamma(-\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} z^{-\alpha_3} F(1 - \alpha_2, \alpha_3; 1 + \alpha_3; \\ \frac{1}{z}) + (-1)^{\alpha_1} \frac{\sin \pi \alpha_2}{\sin \pi \alpha_3} (A'_2 - A_1) + A_1 \quad \text{при } |z| \geq 1. \end{cases} \quad (3.117)$$

В случае, когда  $\alpha_2$  равно нулю или целому отрицательному числу, формула (3.117) теряет смысл. Однако в этих случаях из нее при помощи предельного перехода легко получить соответствующие формулы. Например, если  $\alpha_2 = 0$  (рис. 79, в), то, выполнив в (3.117) предельный переход при  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , получим

$$w = \begin{cases} \frac{\bar{A}_1 - A_1}{2\pi\alpha_1 i} z^{\alpha_1} F(1, \alpha_1; 1 + \alpha_1; z) + A_1 \quad \text{при } |z| \leq 1; \\ \frac{\bar{A}_1 - A_1}{2\pi\alpha_3 i} z^{-\alpha_3} F(1, \alpha_3; 1 + \alpha_3; \frac{1}{z}) + \\ + (-1)^{1-\alpha_3} \frac{\bar{A}_1 - A_1}{2i \sin \pi \alpha_3} + A_1 \quad \text{при } |z| \geq 1. \end{cases} \quad (3.118)$$

Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев конформного отображения треугольников, когда отображающая функция находится непосредственно из формулы Кристоффеля — Шварца.

43. Треугольник  $\left\{0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ . Рассмотрим отображение верхней полуплоскости  $z$  на *вертикальную полуполосу*  $w$  (рис. 80, а, б).

Функцию, отображающую полуплоскость  $z$  на заданный треугольник  $\left\{0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ , будем искать при следующем соответствии точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$	(3.119)
1	$\infty$	$\infty$	0	
2	-1	$-\frac{l}{2}$	$\frac{1}{2}$	
3	1	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Искомая функция имеет вид

$$w = C \int_0^z (z+1)^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{-\frac{1}{2}} dz + C_1 = C \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} + C_1$$

или после интегрирования

$$w = C' \arcsin z + C_1.$$

Константы  $C'$  и  $C_1$  определим из соответствия точек  $k = 2$  и  $k = 3$

$$-\frac{l}{2} = -C' \frac{\pi}{2} + C_1;$$

$$\frac{l}{2} = C' \frac{\pi}{2} + C_1,$$

откуда

$$C_1 = 0; \quad C' = \frac{l}{\pi}.$$

Искомая отображающая функция запишется в виде

$$w = \frac{l}{\pi} \arcsin z. \quad (3.120)$$

Обратная функция

$$z = \sin \frac{\pi}{l} w, \quad (3.121)$$

как уже было показано в п. 31, отображает вертикальную полосу на верхнюю полуплоскость.

Разделив действительную и мнимую части, отображающую функцию (3.121) можно заменить следующей эквивалентной системой:

$$\begin{aligned}x &= \sin \frac{\pi u}{l} \operatorname{ch} \frac{\pi v}{l}; \\y &= \cos \frac{\pi u}{l} \operatorname{sh} \frac{\pi v}{l}.\end{aligned}\quad (3.122)$$

Найдем функцию, отображающую верхнюю полуплоскость  $z$  на треугольник  $\left\{0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ , представляющий собой *горизонтальную полуполосу*  $w$  (рис. 81, а, б).

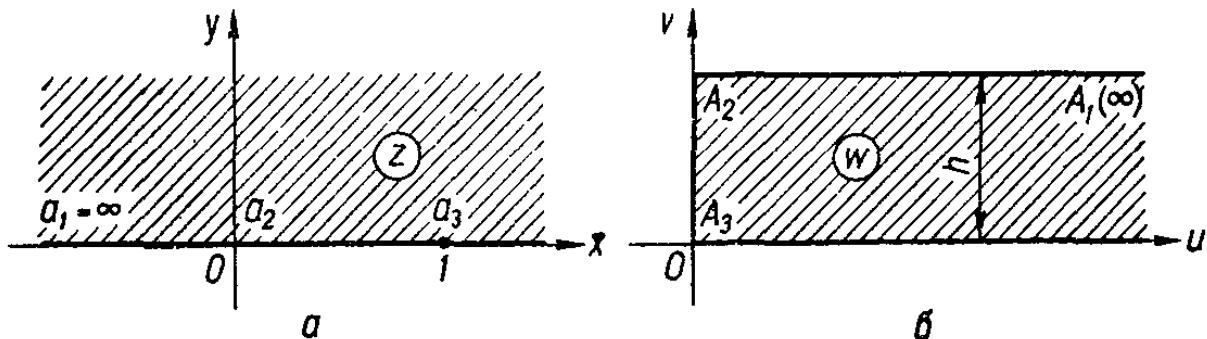


Рис. 81.

Примем следующее соответствие точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	0
2	0	$ih$	$\frac{1}{2}$
3	1	0	$\frac{1}{2}$

(3.123)

Тогда искомая отображающая функция запишется в виде

$$w = C \int_0^z \frac{1}{z} \frac{1}{(z-1)} dz + C_1 = C \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^2 - z}} + C_1$$

или после интегрирования

$$w = C \operatorname{Arch}(2z-1) + C_1. \quad (3.124)$$

Учитывая соотношения (1.141), определим постоянные  $C$  и  $C_1$ , из условия соответствия точек  $k = 2$  и  $k = 3$ , а именно:

$$ih = Ci\pi + C_1; \quad 0 = 0 + C_1;$$

откуда

$$C = \frac{h}{\pi}; \quad C_1 = 0.$$

Следовательно,

$$w = \frac{h}{\pi} \operatorname{Arch}(2z-1). \quad (3.125)$$

Обращая (3.125), найдем функцию, отображающую заданную горизонтальную полуполосу  $w$  на полуплоскость  $z$ ,

$$z = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{ch} \frac{\pi w}{h} \right)$$

или окончательно

$$z = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi w}{2h}. \quad (3.126)$$

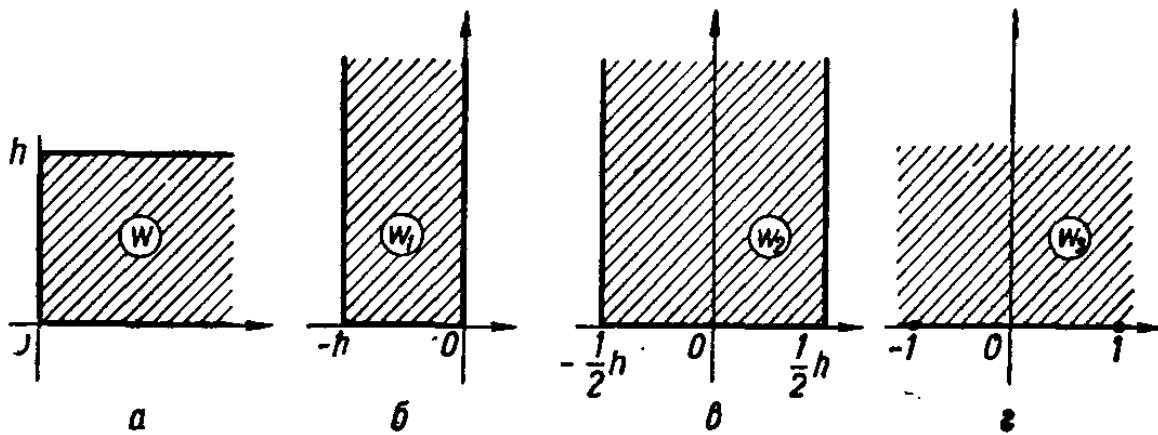


Рис. 82.

Функцию (3.126) легко найти методом последовательных конформных отображений. В самом деле, проделаем следующую цепочку отображений (рис. 82, а, б, в, г):

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{i \frac{\pi}{2}} w = iw; \quad w_2 = w_1 + \frac{h}{2}; \quad w_3 = \sin \frac{\pi}{h} w_2 = \\ &= \sin \left( \frac{\pi}{h} w_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{h} w_1 = \cos \frac{\pi}{h} iw = \operatorname{ch} \frac{\pi}{h} w; \end{aligned}$$

законец,

$$z = \frac{1}{2} (w_3 + 1) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{ch} \frac{\pi w}{h} \right) = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi w}{2h}$$

или

$$z = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi w}{2h}.$$

**44. Треугольник  $\{0; \theta; 1-\theta\}$ .** Обобщая рассмотренный в п. 43 случай, найдем отображение верхней полуплоскости  $z$  на треугольник  $\{0; \theta; 1-\theta\}$ , где  $\theta = \frac{p}{q}$  является рациональным числом, причем  $0 < \theta < 1$  (рис. 83, а, б).

Отображающую функцию будем искать при следующей нормировке:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	0
2	0	$h (\operatorname{ctg} \pi \theta - i)$	$\theta$
3	1	0	$1-\theta$

(3.127)

Из формулы Кристоффеля — Шварца получаем

$$w = C \int_1^z \frac{dz}{z^{1-\theta} (z-1)^\theta} + C_1. \quad (3.128)$$

Из условия соответствия точки  $k = 3$  найдем, что  $C_1 = 0$ . Постоянную  $C$  найдем способом, рассмотренным в п. 40. Интегрируя вдоль полуок-

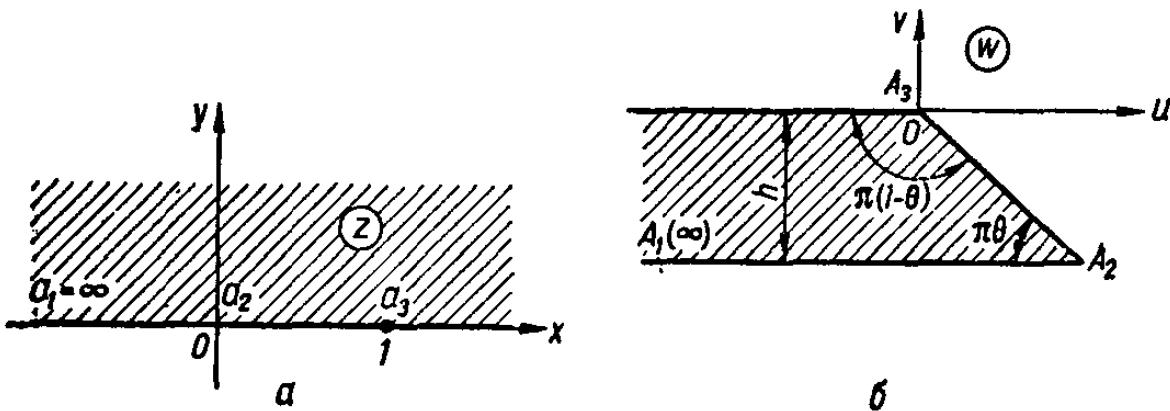


Рис. 83.

ружности  $\gamma_R$  бесконечно большого радиуса с центром в точке  $z = 0$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta w_\infty &= C \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^{1-\theta} (z-1)^\theta} = C \int_0^\pi \frac{Re^{i\Phi} d\Phi}{R^{1-\theta} e^{i\Phi(1-\theta)} (Re^{i\Phi} - 1)^\theta} = \\ &= iC \int_0^\pi \frac{(Re^{i\Phi})^\theta}{(Re^{i\theta} - 1)^\theta} d\Phi = iC \int_0^\pi \frac{d\Phi}{\left(1 - \frac{1}{Re^{i\Phi}}\right)^\theta} = \\ &= iC \int_0^\pi d\Phi + O\left(\frac{1}{R}\right) = iC\pi + O\left(\frac{1}{R}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, при  $R \rightarrow \infty$

$$\Delta w_\infty = iC\pi + O\left(\frac{1}{R}\right). \quad (3.129)$$

С другой стороны, приращение  $\Delta w_\infty$  с точностью до бесконечно малой  $O\left(\frac{1}{R}\right)$  равно разности значений мнимой части  $iv$  соответственно на луче  $A_1A_2$  и  $A_1A_3$ , т. е.

$$\Delta w_\infty = -ih + O\left(\frac{1}{R}\right). \quad (3.130)$$

Сравнивая (3.129) и (3.130), найдем

$$C = -\frac{h}{\pi}.$$

Подставив в (3.128) значения  $C = -\frac{h}{\pi}$  и  $\theta = \frac{p}{q}$ , получим

$$w = -\frac{h}{\pi} \int_1^z \frac{dz}{z \left( \frac{z-1}{z} \right)^{\frac{p}{q}}}. \quad (3.131)$$

Если в (3.131) положить  $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ , то будем иметь случай, рассмотренный нами в предыдущем пункте.

Проинтегрируем правую часть (3.131) в случае, когда  $p$  и  $q$  — целые положительные числа, которые не имеют общих делителей, причем  $p < q$ . Для этого сделаем замену переменных

$$\zeta = \left( \frac{z-1}{z} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (3.132)$$

откуда

$$z = \frac{1}{1 - \zeta^q};$$

$$dz = q \zeta^{q-1} \frac{d\zeta}{(1 - \zeta^q)^2}.$$

После замены переменной интеграл (3.131) запишется следующим образом:

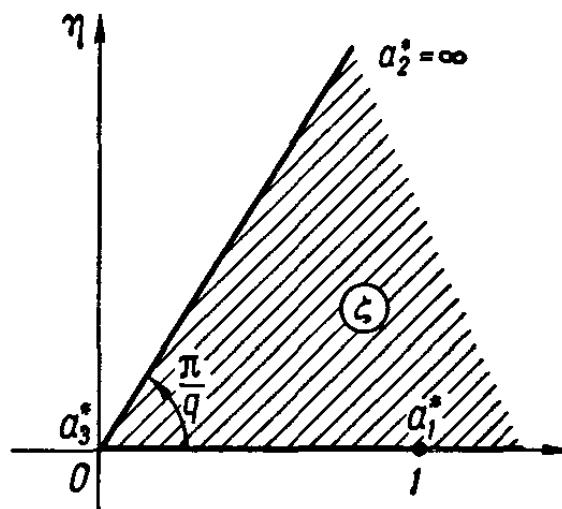


Рис. 84.

$$w = -\frac{h}{\pi} q \int_0^\zeta \frac{\zeta^{q-p-1}}{\zeta^q - 1} d\zeta. \quad (3.133)$$

Так как функция (3.132) переводит верхнюю полуплоскость  $z$  в угловую область  $\zeta$  (рис. 84), то интеграл (3.133) отображает угловую область  $\zeta$  на заданный треугольник  $w$  (см. рис. 83, б). При этом устанавливается следующее соответствие точек:

$k$	$a_k^*$	$A_k$	$\alpha_k$
1	1	$\infty$	0
2	$\infty$	$h(\operatorname{ctg} \pi\theta - i)$	$\theta$
3	0	0	$1 - \theta$

(3.134)

Чтобы выразить интеграл (3.133) через элементарные функции, воспользуемся формулой разложения правильной дроби  $\frac{Q(z)}{P(z)}$  на простейшие в случае, когда знаменатель дроби  $P(z)$  имеет только простые (однократные) корни  $z_n$  [5].

$$\begin{aligned} \frac{Q(z)}{P(z)} &= \frac{Q(z)}{P'(z)} \cdot \frac{1}{z - z_1} + \frac{Q(z_2)}{P'(z_2)} \cdot \frac{1}{z - z_2} + \dots + \\ &\quad + \frac{Q(z_n)}{P'(z_n)} \cdot \frac{1}{z - z_n}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Следовательно, в нашем случае подынтегральная функция будет иметь следующее разложение:

$$\frac{\zeta^{q-p-1}}{\zeta^q - 1} = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\zeta_n^{q-p-1}}{q\zeta_n^{q-1}} \cdot \frac{1}{\zeta - \zeta_n}, \quad (3.136)$$

где нулями знаменателя являются корни из единицы

$$\zeta_n = e^{\frac{2n}{q}\pi i} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, q-1). \quad (3.137)$$

После интегрирования (3.136) в пределах от 0 до  $\zeta$  постоянные  $C_n$  определим из соотвествия точки  $k = 3$ , т. е. постоянные  $C_n$  будут определены таким образом, чтобы все интегралы при  $\zeta = 0$  обращались в нуль:

$$\int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_n} = \ln(\zeta - \zeta_n) + C_n = \ln\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n}\right) + C_n^*, \quad (3.138)$$

откуда  $C_n^* = 0$ , если  $\zeta = 0$ .

Заметим, что в формуле (3.138) берется только главное значение логарифма.

Подставив сумму (3.136) в (3.133) и учитывая (3.138), получим искомую отображающую функцию в окончательном виде

$$w = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{\zeta_n^p} \ln\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n}\right). \quad (3.139)$$

В частности, если в (3.139) положить  $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$  и умножить правую часть на  $-1$ , то получим функцию, отображающую первый квадрант на треугольник  $\left\{0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ , изображенный на рис. 81, б,

$$w = \frac{h}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}. \quad (3.140)$$

Наконец, возвращаясь в формуле (3.140) к переменной  $z$ , при помощи замены  $\zeta = \left(\frac{z-1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$  получим отображающую функцию (3.125).

Действительно,

$$\begin{aligned} w &= \frac{h}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \frac{h}{\pi} \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z} - \sqrt{z-1}} = \\ &= \frac{h}{\pi} \ln \left( 2z - 1 + 2\sqrt{z(z-1)} \right) = \frac{h}{\pi} \operatorname{Arch}(2z-1). \end{aligned}$$

Последний факт служит подтверждением справедливости полученной в этом пункте формулы (3.139).

45. Треугольник  $\{0; -\theta; 1+\theta\}$ . Если в интеграле (3.113) заменить величину угла  $\theta$  на  $-\theta$ , то получим новый интеграл

$$w = -\frac{h}{\pi} \int_1^z \frac{dz}{z^{1+\theta} (z-1)^{-\theta}} = -\frac{h}{\pi} \int_1^z \frac{dz}{z \left(\frac{z}{z-1}\right)^{\frac{p}{q}}}, \quad (3.141)$$

отображающий верхнюю полуплоскость на треугольник  $\{0; -\theta; 1 + \theta\}$ , (рис. 85, б).

При этом устанавливается такое соответствие точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$	
1	$\infty$	$\infty$	0	
2	0	$\infty$	$-\theta$	
3	1	0	$1 + \theta$	

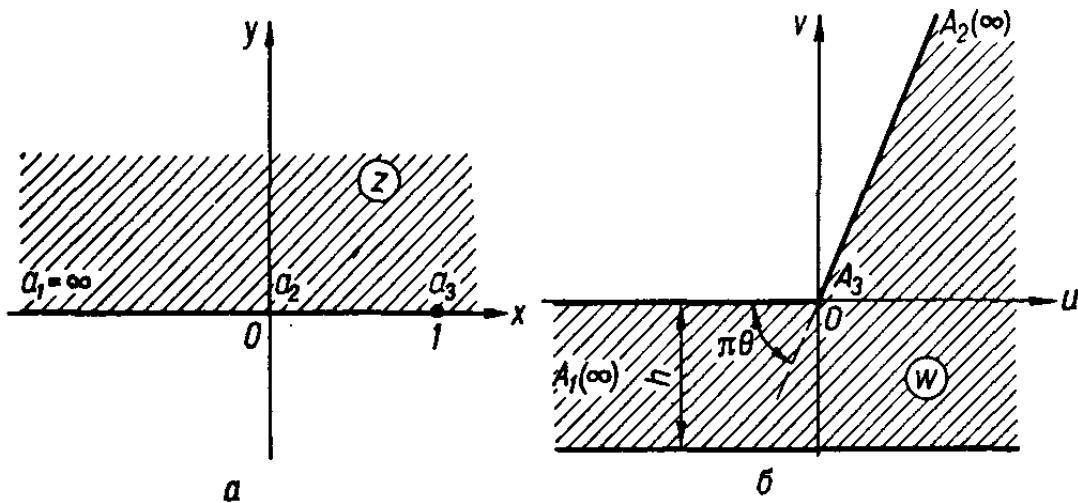
(3.142)


Рис. 85.

Для рациональных  $\theta = \frac{p}{q}$  ( $p < q$ ) вычисление интеграла (3.141) производим, как и в предыдущем случае, при помощи подстановки (3.132). После чего получаем

$$w = \frac{h}{\pi} q \int_0^{\zeta} \frac{\zeta^{q+p-1}}{\zeta^q - 1} d\zeta = \frac{h}{\pi} q \int_0^{\zeta} \left[ \zeta^{p-1} + \frac{\zeta^{p-1}}{\zeta^q - 1} \right] d\zeta. \quad (3.143)$$

Разложение на простейшие дроби дает

$$\frac{\zeta^{p-1}}{\zeta^q - 1} = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\xi_n^{p-1}}{q\xi_n^{q-1}} \cdot \frac{1}{\zeta - \xi_n}, \quad (3.144)$$

где  $\xi_n$  — корни, определяемые по формулам (3.137).

Подставив (3.144) в (3.143) и учитывая (3.138), найдем отображающую функцию

$$w = \frac{h}{\pi} \left[ \frac{q}{p} \zeta^p + \sum_{n=0}^{q-1} \xi_n^{p-q} \ln \left( 1 - \frac{\zeta}{\xi_n} \right) \right]. \quad (3.145)$$

Из (3.145) легко найти отображающие функции для некоторых интересных частных случаев.

Так, например, при  $p = q = 1$  получим функцию, отображающую верхнюю полуплоскость  $\zeta$  на полуплоскость с бесконечным горизонталь-

ным разрезом (рис. 86, а, б)

$$w = \frac{h}{\pi} [\zeta + \ln(1 - \zeta)]. \quad (3.146)$$

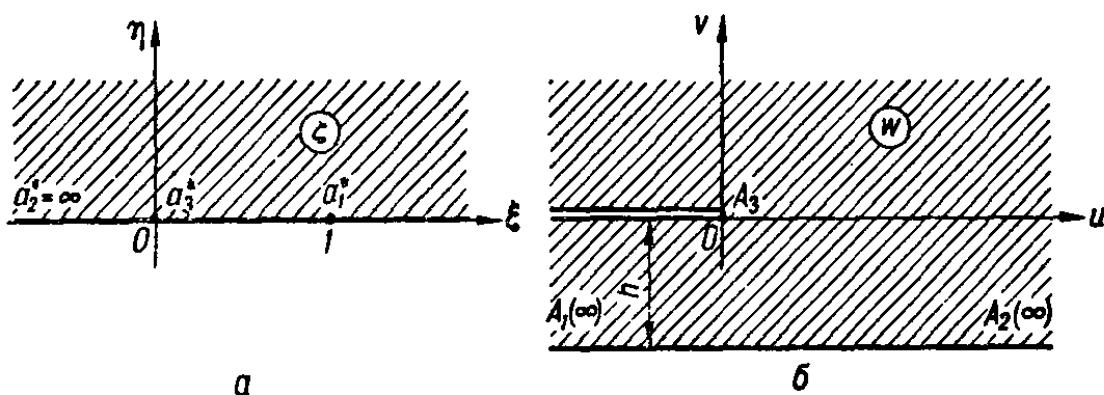


Рис. 86.

При  $p = 1, q = 2$  получим функцию, отображающую первый квадрант  $\zeta$  на треугольник  $\left\{0; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$ , изображенный на рис. 87, б,

$$w = \frac{h}{\pi} \left( 2\zeta + \ln \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right). \quad (3.147)$$

Исходная полуплоскость  $z$  (см. рис. 85, а) отобразится на треугольник  $\left\{0; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$  функцией, которую получим, если в (3.147) перейдем к переменной  $z$  при помощи подстановки (3.132),

$$w = \frac{2h}{\pi} \left[ \sqrt{\frac{z-1}{z}} + \ln(\sqrt{z} - \sqrt{z-1}) \right]. \quad (3.148)$$

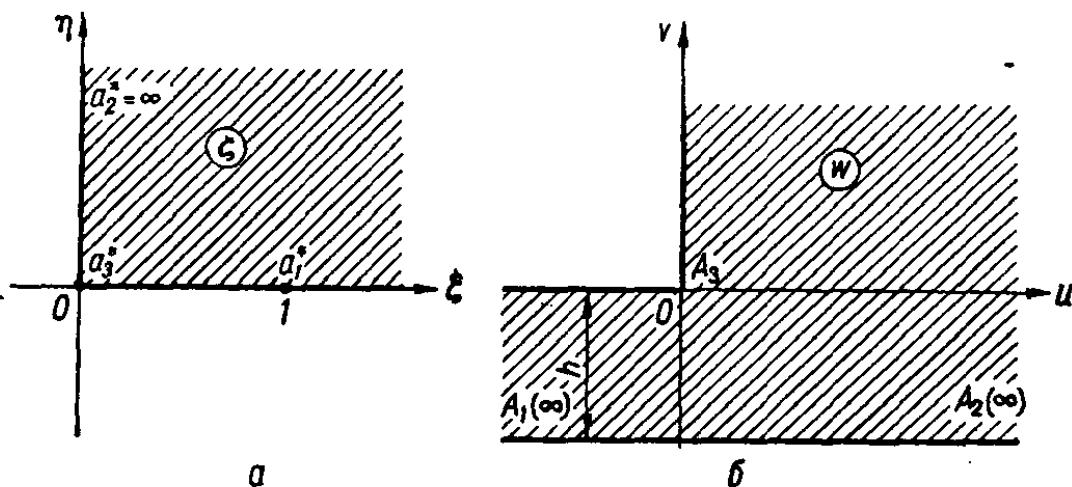


Рис. 87.

46. Треугольник  $\left\{-1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ . Отображение полуплоскости на треугольник  $\left\{-1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ , имеющий вид ступеньки (рис. 88, а, б), бу-

дем искать при следующей нормировке:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	-1
2	-1	$ih$	$\frac{3}{2}$
3	1	0	$\frac{1}{2}$

(3.149)

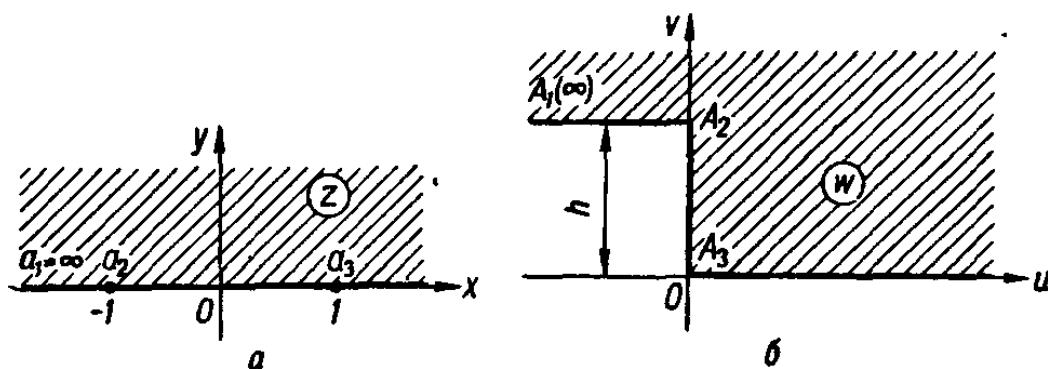


Рис. 88.

В этом случае отображающая функция примет вид

$$w = C \int_1^z (z+1)^{\frac{1}{2}} (z-1)^{-\frac{1}{2}} dz, \quad (3.150)$$

где постоянная  $C_1 = 0$  в силу выбранного соответствия точки  $k = 3$ .  
Проинтегрируем правую часть (3.150):

$$\begin{aligned} w &= C \int_1^z \frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1}} dz = C \int_1^z \frac{z dz}{\sqrt{z^2-1}} + C \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \\ &= C (\sqrt{z^2-1} + \operatorname{Arch} z). \end{aligned}$$

Постоянную  $C$  определим из соответствия точки  $k = 2$ :

$$ih = C \pi i; \quad C = \frac{h}{\pi}.$$

Следовательно, отображающая функция имеет следующий окончательный вид:

$$w = \frac{h}{\pi} (\pm \sqrt{z^2-1} + \operatorname{Arch} z). \quad (3.151)$$

Если же рассматривать отображение полуплоскости  $z$  на треугольник  $\left\{-1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$ , то удобно принять следующую нормировку

(рис. 89, а, б):

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	-1
2	-1	$-ih$	$\frac{1}{2}$
3	+1	0	$\frac{3}{2}$

(3.152)

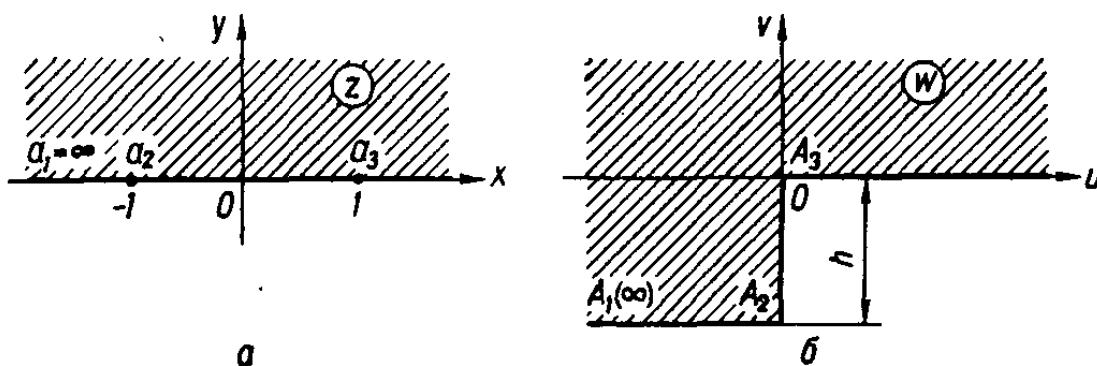


Рис. 89.

В этом случае, поступая аналогично предыдущему, найдем

$$w = C \int \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}} dz = C (\sqrt{z^2-1} = \operatorname{Arch} z)$$

или, определив постоянную  $C$  из соответствия точки  $k = 2$ , окончательно получим

$$w = \frac{h}{\pi} (\pm \sqrt{z^2-1} - \operatorname{Arch} z). \quad (3.153)$$

Учитывая двузначность радикала, а также воспользовавшись зависимостью (1.185) и тем, что

$$\operatorname{Arch}(-z) = i\pi + \operatorname{Arch} z, \quad (3.154)$$

получим формулы для отображения границы.

Из (3.151) имеем:

если  $-\infty < x < -1$ , то

$$w_{A_1 A_2} = -\frac{h}{\pi} (\sqrt{x^2-1} - \operatorname{Arch} x) + ih; \quad (3.155)$$

если  $-1 < x < 1$ , то

$$w_{A_2 A_3} = \frac{ih}{\pi} (\sqrt{1-x^2} + \arccos x); \quad (3.156)$$

если  $1 < x < \infty$ , то

$$w_{A_3 A_1} = \frac{h}{\pi} (\sqrt{x^2-1} + \operatorname{Arch} x). \quad (3.157)$$

Аналогично из (3.153) получим:

$$w_{A_1 A_2} = -\frac{h}{\pi} (\sqrt{x^2 - 1} + \operatorname{Arch} x) - ih; \quad (3.158)$$

$$w_{A_2 A_3} = -\frac{ih}{\pi} (\arccos x - \sqrt{1 - x^2}); \quad (3.159)$$

$$w_{A_3 A_1} = \frac{h}{\pi} (\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{Arch} x). \quad (3.160)$$

47. Треугольник  $\{-1; 1 - \theta; 1 + \theta\}$ . Обобщая результаты предыдущего пункта, найдем функцию отображающую верхнюю полуплоскость на треугольник  $\{-1; 1 - \theta; 1 + \theta\}$  (рис. 90, а, б).

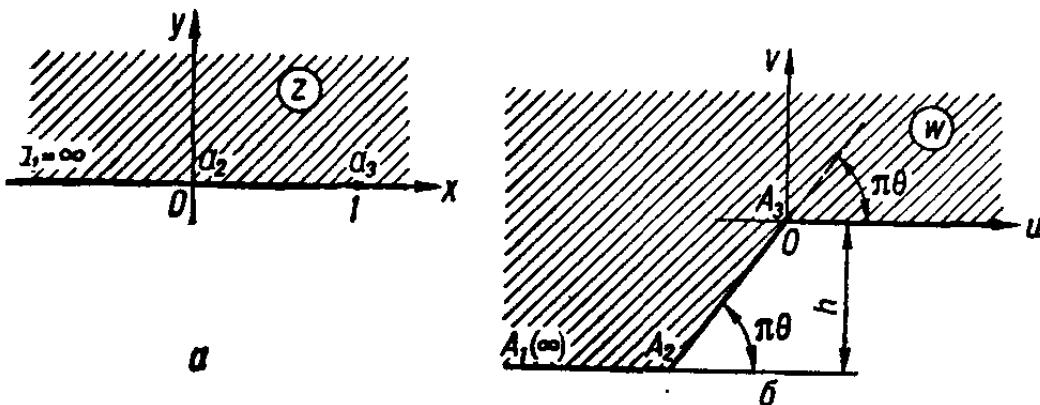


Рис. 90.

Отображающую функцию ищем при следующей нормировке:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	-1
2	0	$-h(\operatorname{ctg} \pi\theta + i)$	$1 - \theta$
3	1	0	$1 + \theta$

(3.161)

из формулы Кристоффеля — Шварца непосредственно получаем

$$w = C \int_1^z \left( \frac{z-1}{z} \right)^\theta dz + C_1. \quad (3.162)$$

В силу выбранного соответствия точки  $k = 3$  имеем  $C_1 = 0$ .

Постоянную  $C$  найдем из соответствия точки  $k = 2$ . Согласно (3.161), с одной стороны,

$$w_{(0)} = -h(\operatorname{ctg} \pi\theta + i) = -\frac{h}{\sin \pi\theta} e^{i\pi\theta}. \quad (3.163)$$

С другой стороны, используя интегральное представление (3.162), а также свойства бета- и гамма-функции [42], получим

$$w(0) = -C \int_0^1 z^{-\theta} (z-1)^\theta dz = -Ce^{i\pi\theta} \int_0^1 z^{-\theta} (1-z)^\theta dz =$$

$$= -Ce^{i\pi\theta}B(1-\theta, 1+\theta) = -Ce^{i\pi\theta} \frac{\Gamma(1-\theta)\Gamma(1+\theta)}{\Gamma(2)} = \\ = -Ce^{i\pi\theta} \theta\Gamma(\theta)\Gamma(1-\theta).$$

Учитывая, что

$$\Gamma(\theta)\Gamma(1-\theta) = \frac{\pi}{\sin \theta\pi}, \quad (3.164)$$

окончательно имеем

$$w(0) = -Ce^{i\pi\theta} \frac{\pi\theta}{\sin \pi\theta}. \quad (3.165)$$

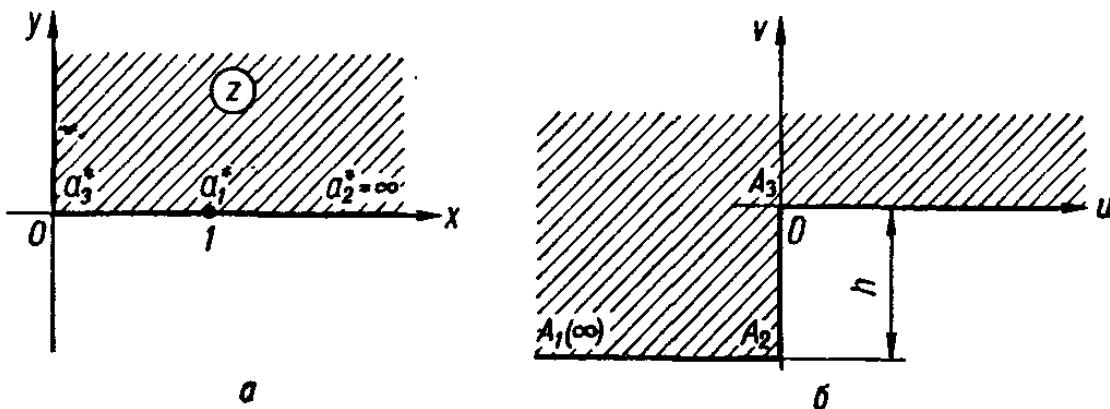


Рис. 91.

Сравнивая (3.163) и (3.165), найдем

$$C = \frac{h}{\pi\theta}. \quad (3.166)$$

Таким образом, интеграл (3.162) в случае, когда  $\theta = \frac{p}{q}$  рационально, будет иметь вид

$$w = \frac{h}{\pi\theta} \int_1^z \left( \frac{z-1}{z} \right)^{\frac{p}{q}} dz. \quad (3.167)$$

Используя уже известную подстановку (3.132) и интегрируя по частям, из (3.167) получим

$$w = \frac{h}{\pi\theta} q \int_0^\zeta \frac{\zeta^{p+q-1}}{(\zeta^q - 1)^2} d\zeta = \\ = \frac{h}{\pi\theta} \left[ -\frac{\zeta^p}{\zeta^q - 1} + p \int_0^\zeta \frac{\zeta^{p-1}}{\zeta^q - 1} d\zeta \right]. \quad (3.168)$$

Разложим, как и в предыдущих случаях, подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{\zeta^{p-1}}{\zeta^q - 1} = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\zeta^{p-1}}{\zeta_n^{q-1}} \cdot \frac{1}{\zeta - \zeta_n} = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} \frac{\zeta^{p-q}}{\zeta - \zeta_n}, \quad (3.169)$$

где нули знаменателя  $\zeta_n$  определяются равенством (3.137).

Подставив (3.169) в (3.168) и проинтегрировав, отображающую функцию найдем в виде

$$\omega = \frac{h}{\pi} \left[ -\frac{q}{p} \cdot \frac{\zeta^p}{\zeta^q - 1} + \sum_{n=0}^{q-1} \zeta^{p-q} \ln \left( 1 - \frac{\zeta}{\zeta_n} \right) \right]. \quad (3.170)$$

В частности, при  $p = 1$  и  $q = 2$  из (3.170) получим функцию, отображающую первый квадрант  $\zeta$  на ступенчатую область  $\omega$  (рис. 91, а, б)

$$\omega = \frac{h}{\pi} \left( \frac{2\zeta}{1 - \zeta^2} + \ln \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \right). \quad (3.171)$$

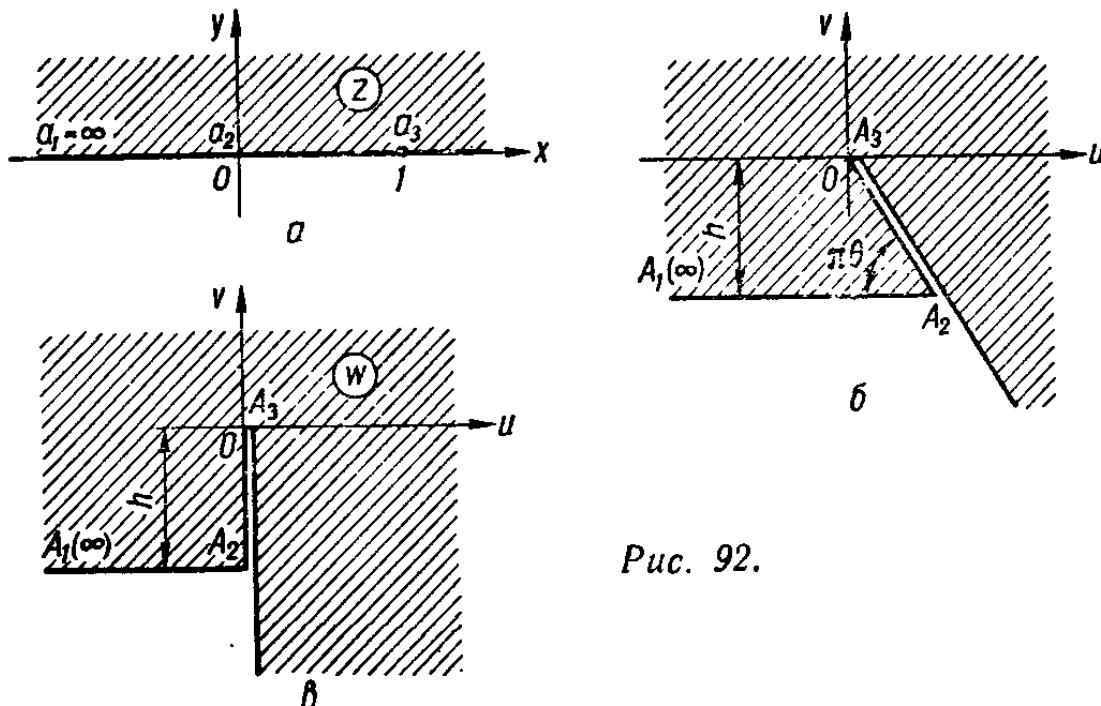


Рис. 92.

48. Треугольник  $\{-(1+\theta); \theta; 2\}$ . Рассмотрим отображение верхней полуплоскости  $z$  на треугольник  $\{-(1+\theta); \theta; 2\}$ , изображенный на рис. 92, б. Примем следующее соответствие трех точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	$-(1+\theta)$
2	0	$h(\operatorname{ctg} \pi\theta - i)$	$\theta$
3	1	0	2

(3.172)

В случае, когда  $\theta = \frac{1}{2}$  (рис. 92, в), отображающая функция принимает вид

$$\omega = C \int_0^z \frac{z-1}{\sqrt{z}} dz + C = \frac{2C}{3} \sqrt{z}(z-3) + C_1.$$

Постоянныe  $C$  и  $C_1$  определим из соответствия точек  $k = 2$  и  $k = 3$ , т. е.

$$-ih = C_1;$$

$$0 = -\frac{4}{3}C + C_1,$$

откуда

$$C_1 = -ih; \quad C = -\frac{3}{4}ih. \quad (3.173)$$

Окончательно отображающая функция запишется в виде

$$w = -ih \left( \sqrt{z} \frac{z-3}{2} + 1 \right). \quad (3.174)$$

Теперь найдем отображающую функцию в случае, когда  $\theta = \frac{p}{q}$  является рациональным числом, причем  $0 < \theta < 1$ .

В этом случае

$$w = C \int_0^z \frac{z-1}{z^{1-\theta}} dz + C_1 = Cz^\theta \frac{(z-1)\theta - 1}{\theta(\theta+1)} + C_1.$$

Постоянныe  $C$  и  $C_1$  определим из соответствия точек  $k = 2$  и  $k = 3$ :

$$h(\operatorname{ctg} \pi\theta - i) = \frac{h}{\sin \pi\theta} e^{-i\pi\theta} = C_1; \quad 0 = \frac{-C}{\theta(\theta+1)} + C_1,$$

откуда

$$C = \frac{\theta(\theta+1)h}{\sin \pi\theta} e^{-i\pi\theta}; \quad C_1 = \frac{h}{\sin \pi\theta} e^{-i\pi\theta}. \quad (3.175)$$

Следовательно, отображающая функция в общем случае будет иметь следующий окончательный вид:

$$w = \frac{h}{\sin \pi\theta} e^{-i\pi\theta} \{ z^\theta [(\theta-1)\theta - 1] + 1 \}. \quad (3.176)$$

Если положить  $\theta = \frac{p}{q}$ , то (3.176) запишется в виде

$$w = \frac{h}{\sin \frac{p}{q}\pi} e^{-i\frac{p}{q}\pi} \left[ \sqrt[q]{z^p} \cdot \frac{(z-1)p-q}{q} + 1 \right]. \quad (3.177)$$

Легко видеть, что формула (3.174) получается из (3.177), если в последней положить  $p = 1$  и  $q = 2$ .

49. Треугольник  $\{-1 + \theta; -\theta; 2\}$ . Заменим в формуле (3.176) величину угла  $\theta$  на  $-\theta$ . Тогда получим функцию

$$w = \frac{h}{\sin \pi\theta} e^{i\pi\theta} \left[ \frac{(z-1)\theta + 1}{z^\theta} - 1 \right], \quad (3.178)$$

которая будет отображать верхнюю полуплоскость  $z$  на треугольник  $\{-1 + \theta; -\theta; 2\}$ , изображенный на рис. 93, б. В частности, если

в формуле (3.178) положим  $\theta = \frac{1}{2}$ , то получим функцию

$$w = ih \left( \frac{z+1}{2\sqrt{z}} - 1 \right), \quad (3.179)$$

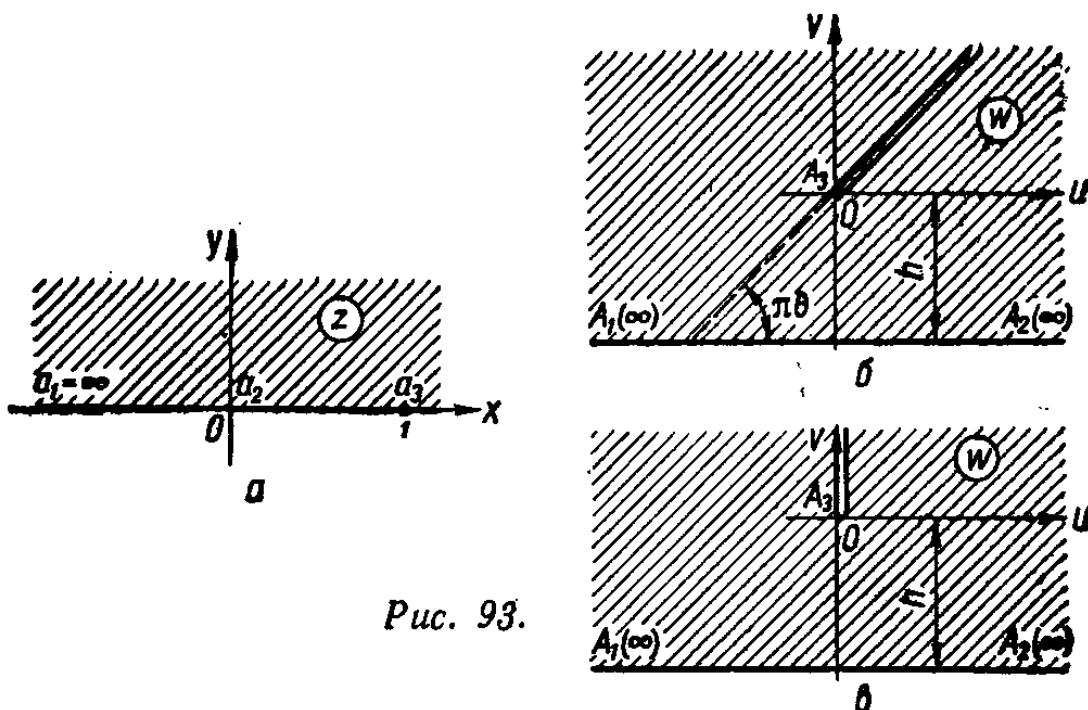


Рис. 93.

которая отображает верхнюю полуплоскость на полуплоскость с вырезом вдоль вертикального луча, выходящего из начала координат (рис. 93, а, б).

## § 5. Отображение четырехугольников

50. Прямоугольник  $\left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$ . Рассмотрим один из простейших примеров конформного отображения четырехугольников — ото-

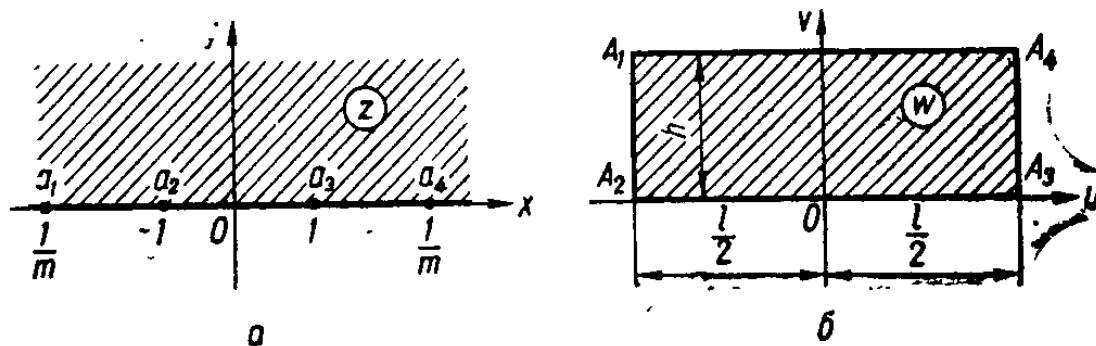


Рис. 94.

ражение полуплоскости  $z$  на прямоугольник  $w$ , длина которого равна  $l$ , а ширина равна  $h$  (рис. 94, а, б). Функцию, отображающую полуплоскость  $z$  на заданный четырехугольник  $\left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$ , будем

искать при следующем соответствии точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$-\frac{1}{m}$	$-\frac{l}{2} + ih$	$\frac{1}{2}$
2	-1	$-\frac{l}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	1	$\frac{l}{2}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{m}$	$\frac{l}{2} + ih$	$\frac{1}{2}$

(3.180)

Теперь запишем исковую функцию через интеграл Кристоффеля — Шварца

$$w = C' \int_0^z \left( z + \frac{1}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{-\frac{1}{2}} \left( z - \frac{1}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} dz + \\ + C_1 = C \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}} + C_1$$

или

$$w = CF(z, m) + C_1, \quad (3.181)$$

где  $F(z; m)$  — эллиптический интеграл I рода.

Учитывая соответствие точек (3.180) и соотношение (3.56), найдем постоянные  $C$  и  $C_1$

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= CK + C_1; \quad -\frac{l}{2} = -CK + C_1; \quad C_1 = 0 \\ \frac{l}{2} + ih &= CF\left(\frac{1}{m}, m\right) = CK + CiK'; \\ -\frac{l}{2} + ih &= CF\left(-\frac{1}{m}, m\right) = -CK + CiK'; \end{aligned}$$

откуда

$$C_1 = 0; \quad C = \frac{h}{K'} = \frac{l}{2K}. \quad (3.182)$$

Следовательно, отображающая функция запишется в виде

$$w = \frac{l}{2K} F(z, m), \quad (3.183)$$

где модуль  $m$  эллиптического интеграла I рода  $F(z, m)$  находится из равенства

$$\frac{K}{K'} = \frac{l}{2h}. \quad (3.184)$$

Обращая интеграл (3.183), найдем, что конформное отображение заданного прямоугольника на полуплоскость осуществляется при помощи эллиптического синуса

$$z = \operatorname{sn} \left( \frac{2K}{l} w, m \right), \quad (3.185)$$

где модуль  $m$  определяется из соотношения (3.184).

**51. Четырехугольник**  $\left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$ . Найдем отображение первого квадранта (рис. 95, а) на четырехугольник  $\left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$ , изображенный на рис. 95, б. Для отыскания отображающей функции через интеграл Кристоффеля — Шварца дополним квадрант до полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , а четырехугольник  $A_1 A_2 A_3 A_4$  дополним симметричным относительно мнимой оси четырехугольником  $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$  (рис. 95, б). В силу принципа симметрии (см. п. 19) искомое преобразование будет осуществляться функцией, отображающей верхнюю полуплоскость на пятиугольник  $\bar{A}_4 \bar{A}_3 \bar{A}_2 A_1 A_2 A_3 A_4$ . При этом для четырехугольника  $A_1 A_2 A_3 A_4$  удобно задать следующее соответствие точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$	
1	0	0	$\frac{1}{2}$	
2	1	$l$	$\frac{1}{2}$	
3	$\frac{1}{m}$	$l + ih$	$\frac{3}{2}$	
4	$\infty$	$\infty$	$-\frac{1}{2}$	

(3.186)

Интеграл Кристоффеля — Шварца в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^z \left( z + \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{-\frac{1}{2}} \left( z - \frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{2}} dz + C_1 = \\ &= C' \int_0^z \sqrt{\frac{1-m^2 z^2}{1-z^2}} dz + C_1 \end{aligned}$$

или

$$w = CE(z, m) + C_1, \quad (3.187)$$

где  $E(z, m)$  — эллиптический интеграл II рода.

Учитывая соответствие точек (3.186) и соотношение (3.58), найдем постоянные  $C$ ,  $C_1$  и модуль  $m$

$$0 = CE(0, m) + C_1;$$

$$l = CE(1, m) = CE,$$

откуда

$$C_1 = 0; \quad C = \frac{l}{E},$$

кроме того,

$$l + ih = CE \left( \frac{1}{m}, m \right) = \frac{l}{E} [E + i(K' - E')] = \\ = l + il \frac{K' - E'}{E}.$$

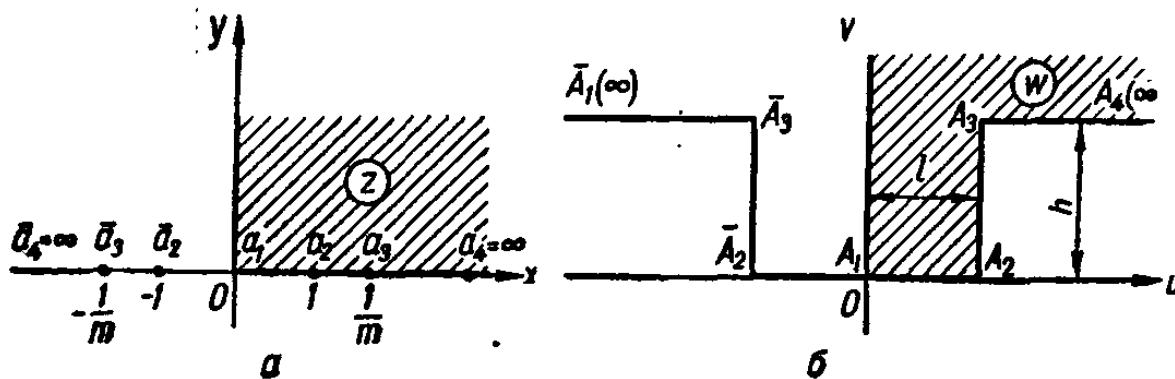


Рис. 95.

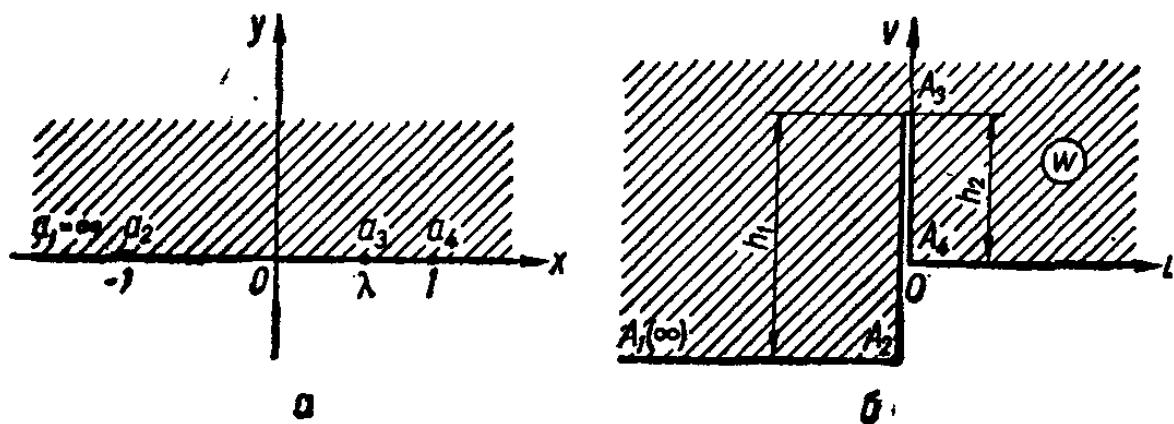


Рис. 96.

Из равенства (3.189) находим

$$\frac{h}{l} = \frac{K' - E'}{E}. \quad (3.190)$$

Таким образом, отображающая функция запишется в следующем окончательном виде:

$$w = \frac{l}{E} E(z; m), \quad (3.191)$$

где модуль  $m$  эллиптических интегралов II рода  $E(z; m)$  и  $E(m)$  находится из соотношения (3.190).

52. Четырехугольники  $\left\{-1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right\}$  и  $\left\{-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right\}$ . Отображение верхней полуплоскости  $z$  на четырехугольник  $\left\{-1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right\}$ :

заданными параметрами  $h_1$  и  $h_2$  (рис. 96, а, б) найдем, приняв следующее соответствие точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$	
1	$\infty$	$\infty$	-1	
2	-1	$-i(h_1 - h_2)$	$\frac{1}{2}$	(3.192)
3	$\lambda$	$ih_2$	2	
4	1	0	$\frac{1}{2}$	

Интеграл Кристоффеля — Шварца запишется

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^z (z+1)^{-\frac{1}{2}} (z-\lambda)(z-1)^{-\frac{1}{2}} dz + C_1 = \\ &= C \int_0^z \frac{z-\lambda}{\sqrt{z^2-1}} dz + C_1 \end{aligned}$$

или после интегрирования

$$w = C (\sqrt{z^2-1} - \lambda \operatorname{Arch} z) + C'_1. \quad (3.193)$$

Постоянныe  $C$  и  $C'_1$  найдем из соответствия точек  $k = 2$  и  $k = 4$

$$\begin{aligned} -i(h_1 - h_2) &= -C\lambda \operatorname{Arch}(-1) + C_1 = -iC\lambda\pi + C'_1; \\ 0 &= -C\lambda \operatorname{Arch} 1 + C'_1 = C'_1, \end{aligned}$$

откуда

$$C'_1 = 0, \quad C = \frac{h_1 - h_2}{\lambda\pi}. \quad (3.194)$$

Подставив (3.194) в (3.193), найдем

$$w = \frac{h_1 - h_2}{\lambda\pi} (\sqrt{z^2-1} - \lambda \operatorname{Arch} z). \quad (3.195)$$

Из соответствия точки  $k = 3$  получим уравнение для определения константы  $\lambda$

$$\frac{h_2\pi}{h_1 - h_2} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} - \arccos \lambda \quad (-1 < \lambda < 1). \quad (3.196)$$

В случае, если  $h_1 = h_2 = h$  ( $\lambda = 0$ ), из (3.193) получаем

$$w = C \sqrt{z^2-1}.$$

Используя соответствие точки  $k = 3$ , определим, что  $C = h$ , а следовательно,

$$w = h \sqrt{z^2 - 1}. \quad (3.197)$$

Обратив (3.197), найдем функцию, отображающую полуплоскость с вертикальным разрезом длины  $h$  на полуплоскость без разреза (рис. 97, а, б),

$$z = \frac{1}{h} \sqrt{w^2 + h^2}. \quad (3.198)$$

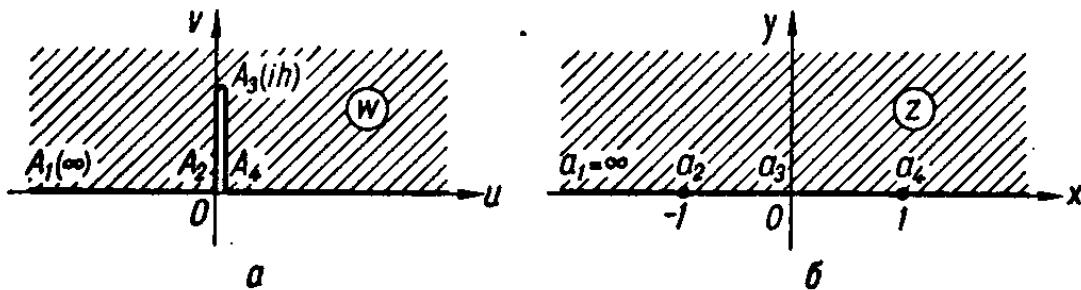


Рис. 97.

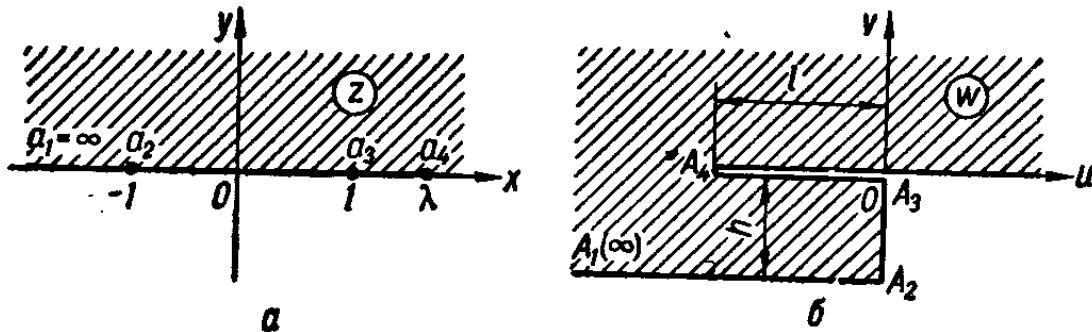


Рис. 98.

Из (3.195) найдем функцию, отображающую верхнюю полуплоскость  $z$  на четырехугольник  $\left\{-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right\}$ , изображенный на рис. 98, а, б. Для этого необходимо принять следующую нормировку:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	-1
2	-1	$-ih$	$\frac{1}{2}$
3	1	0	$-\frac{1}{2}$
4	$\lambda$	$-l$	2

(3.199)

и в равенстве (3.195) положить  $h_1 = h$ ,  $h_2 = 0$ .

Таким образом, искомая отображающая функция будет иметь вид

$$w = \frac{h}{\lambda \pi} \left( \sqrt{z^2 - 1} - \lambda \operatorname{Arch} z \right), \quad (3.200)$$

где постоянная  $\lambda$  определяется из соотношения

$$-\frac{l\pi}{h} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda} - \operatorname{Arch} \lambda \quad (\lambda > 1). \quad (3.201)$$

53. Четырехугольники  $\left\{-2; 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$  и  $\left\{-2; \frac{1}{2}; 2; \frac{3}{2}\right\}$ . Отобразим верхнюю полуплоскость  $z$  на четырехугольник  $\left\{-2; 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$  с заданными параметрами  $l$  и  $h$  (рис. 99, а, б).

В рассматриваемом случае принимаем следующее соответствие точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	-2
2	$-\lambda$	$ih$	2
3	0	0	$\frac{1}{2}$
4	1	$l$	$\frac{3}{2}$

(3.202)

После этого интеграл Кристоффеля — Шварца запишется в виде

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^z (z + \lambda) z^{-\frac{1}{2}} (z - 1)^{-\frac{1}{2}} dz + C_1 = \\ &= C \int_0^z (z + \lambda) \sqrt{\frac{z-1}{z}} dz + C_1 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^z (z + \lambda) \sqrt{\frac{z-1}{z}} dz + C_1 = \\ &= C \int_0^z \frac{(z + \lambda)(z - 1)}{\sqrt{z(z-1)}} dz + C_1 = C \int_0^z \frac{(z^2 - z) + \lambda(z - 1)}{\sqrt{z^2 - z}} dz + C_1 = \\ &= C \left[ \int_0^z \sqrt{z^2 - z} dz + \frac{\lambda}{2} \int_0^z \frac{(2z - 1) - 1}{\sqrt{z^2 - z}} dz \right] + C_1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \left[ \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{2} \right) \sqrt{z^2 - z} - \frac{1}{8} \operatorname{Arch}(2z - 1) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda \sqrt{z^2 - z} - \frac{\lambda}{2} \operatorname{Arch}(2z - 1) \right] + C'_1 = \\
&= C \left[ \left( \frac{z}{2} + \lambda - \frac{1}{4} \right) \sqrt{z(z-1)} - \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{4} \right) \operatorname{Arch}(2z-1) \right] + C'_1.
\end{aligned}$$

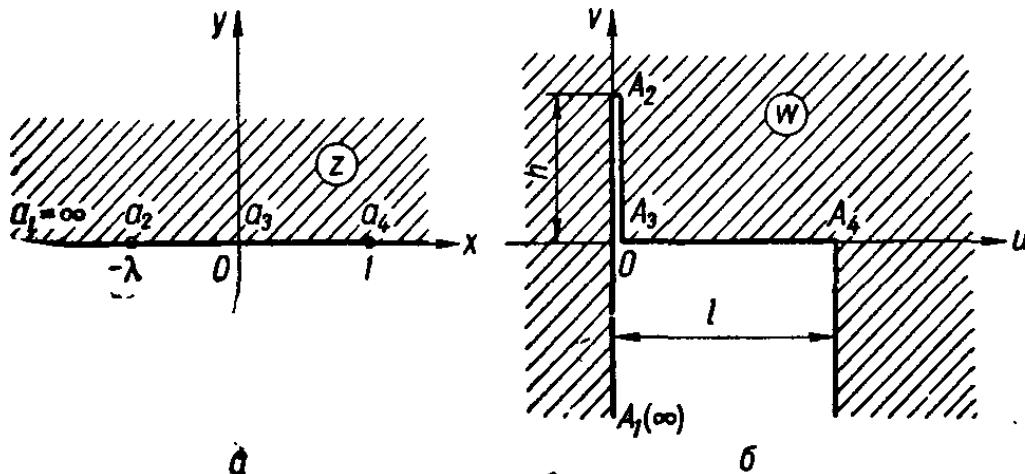


Рис. 99.

Учитывая, что  $\operatorname{Arch}(2z-1) = 2\operatorname{Arch}\sqrt{z}$ , получим

$$w = C \left[ \left( \frac{z}{2} + \lambda - \frac{1}{4} \right) \sqrt{z(z-1)} - \left( \lambda + \frac{1}{4} \right) \operatorname{Arch}\sqrt{z} \right] + C'_1. \quad (3.203)$$

Постоянные  $C$  и  $C'_1$  найдем из соответствия точек  $k = 3$  и  $k = 4$

$$\begin{aligned}
0 &= -C \left( \lambda + \frac{1}{4} \right) \frac{\pi i}{2} + C'_1; \\
l &= C'_1.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$C = -\frac{8l}{(1+4\lambda)\pi i}, \quad (3.204)$$

а отображающая функция (3.203) запишется в таком окончательном виде:

$$w = l - \frac{2l}{\pi i} \left[ \operatorname{Arch}\sqrt{z} - \frac{2z-1+4\lambda}{1+4\lambda} \sqrt{z(z-1)} \right]. \quad (3.205)$$

Используя соответствие точек  $k = 2$ , из (3.205) получаем уравнение для определения постоянной  $\lambda$

$$\frac{h\pi}{2l} = \frac{1-2\lambda}{1+4\lambda} \sqrt{\lambda(1+\lambda)} \quad \left( \frac{1}{2} < \lambda < 0 \right). \quad (3.206)$$

Теперь легко записать функцию, отображающую верхнюю полуплоскость  $z$  на четырехугольник  $\left\{ -2; \frac{1}{2}; 2; \frac{3}{2} \right\}$ , изображенный на

рис. 100, б. Для этого в равенстве (3.205) заменим  $\lambda$  на  $-\lambda$  и примем зеркаровку

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	-2
2	0	0	$\frac{1}{2}$
3	$\lambda$	$-h$	2
4	1	1	$\frac{3}{2}$

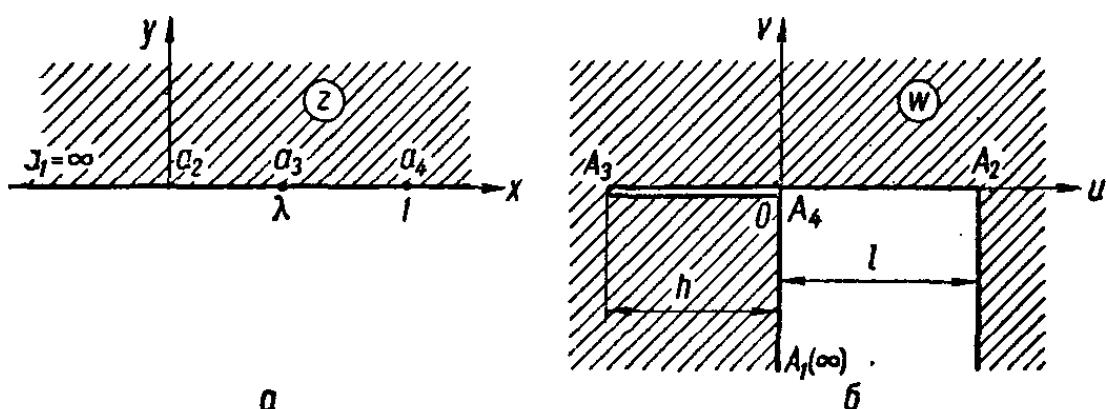
(3.207)


Рис. 100.

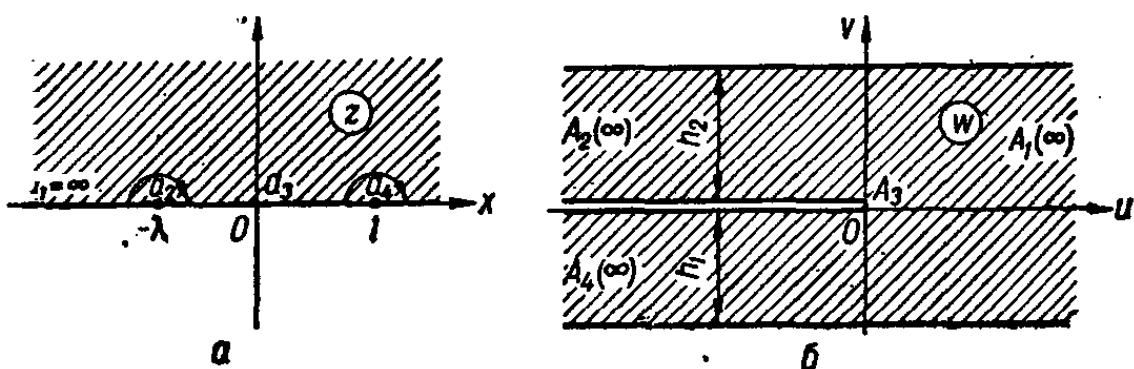


Рис. 101.

Следовательно, искомая функция запишется в виде

$$w = l - \frac{2l}{\pi i} \left[ \operatorname{Arch} \sqrt{z} - \frac{2z - 1 - 4\lambda}{1 - 4\lambda} \sqrt{z(z-1)} \right], \quad (3.208)$$

где  $\lambda$  определяется из соотношения

$$\frac{h+l}{l} \pi = \frac{(2+4\lambda) \sqrt{\lambda(1-\lambda)}}{1-4\lambda} \quad \left(0 < \lambda < \frac{1}{4}\right). \quad (3.209)$$

54. Четырехугольник  $\{0; 0; 2; 0\}$ . Найдем функцию, отображающую полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$  на четырехугольник  $\{0; 0; 2; 0\}$ , три вершины

которого находятся в бесконечности (рис. 101, б). Соответствие точек, как и в предыдущих примерах, зададим следующим образом:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$	
1	$\infty$	$\infty$	0	
2	$-\lambda$	$-\infty$	0	(3.210)
3	0	0	2	
4	1	$\infty$	0	

Искомую функцию запишем через интеграл Кристоффеля — Шварца

$$w = C \int_0^z (z + \lambda)^{-1} z (z - 1)^{-1} dz + C_1 = C' \int_0^z \frac{z dz}{(1 - z)(\lambda + z)} \quad (3.211)$$

( $C_1 = 0$  в силу соответствия точки  $k = 3$ ). Не выражая интеграл через элементарные функции, определим постоянные  $C'$  и  $\lambda$  через заданные параметры четырехугольника  $h_1$  и  $h_2$ .

Для этого воспользуемся уже известным из п. 40 положением, что образ полуокружности  $\gamma$ , бесконечно малого радиуса  $r$  с центром в полюсе  $z = -\lambda$  с точностью до бесконечно малой порядка, высшего, чем  $r$ , представляет собой отрезок прямой, соединяющий лучи  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$  и перпендикулярный к этим лучам.

Поэтому приращение  $\Delta w_{-\lambda}$  при обходе точки  $z = -\lambda$  по полуокружности  $z + \lambda = re^{i\theta}$  бесконечно малого радиуса (обход совершают таким образом, чтобы область  $z$  находилась слева) с точностью до бесконечности малой  $O(r)$  равно разности значений мнимой части соответственно на луче  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$ , а именно:

$$\Delta w_{-\lambda} = -ih_2 + O(r) \quad (r \rightarrow 0). \quad (3.212)$$

С другой стороны, найдем приращение функции вдоль полуокружности при обходе точки  $z = -\lambda$ , воспользовавшись интегралом (3.211) и заменой  $z + \lambda = re^{i\theta}$  ( $\pi \geq 0 \geq 0$ ):

$$\begin{aligned} \Delta w_{-\lambda} &= C' \int_{\gamma_2} \frac{z dz}{(1 - z)(\lambda + z)} = C' \int_{\pi}^0 \frac{(re^{i\theta} - \lambda) re^{i\theta} id\theta}{(1 + \lambda - re^{i\theta}) re^{i\theta}} = \\ &= -C' \frac{i\lambda}{1 + \lambda} \theta \Big|_{\pi}^0 + O(r) \quad (r \rightarrow 0) \end{aligned}$$

или

$$\Delta w_{-\lambda} = \frac{iC'\lambda\pi}{1 - \lambda} + O(r) \quad (r \rightarrow 0). \quad (3.213)$$

Учитывая (3.212) и (3.213), находим

$$h_2 = -\frac{C'\lambda\pi}{1+\lambda}. \quad (3.214)$$

Используя теорию вычетов, можно получить соотношение (3.214), непосредственно вычисля значение интеграла (3.211) вдоль замкнутого контура, внутри которого содержится полюс  $z = -\lambda$ , а именно:

$$\begin{aligned} 2h_2i &= C' \oint_{\gamma_r} \frac{z dz}{(1-z)(\lambda+z)} = C' 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{z}{(1-z)(\lambda+z)}; -\lambda \right] = \\ &= 2C'\pi i \lim_{z \rightarrow -\lambda} \frac{(z+\lambda)z}{(1-z)(z+\lambda)} = -2\pi C'i \frac{\lambda}{1+\lambda}. \end{aligned}$$

Аналогично при обходе полюса  $z = 1$  имеем, с одной стороны,

$$\Delta w_1 = -ih_1 + O(r) \quad (r \rightarrow 0) \quad (3.215)$$

и, с другой стороны, используя (3.211) и сделав замену  $1-z = re^{i\theta}$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta w_1 &= C' \oint_{\gamma_z} \frac{z dz}{(z+\lambda)(1-z)} = C' \int_0^{-\pi} \frac{(1-re^{i\theta})(-re^{i\theta}id\theta)}{(1+\lambda-re^{i\theta})re^{i\theta}} = \\ &= C' \frac{i}{1+\lambda} \int_0^{\pi} + O(r) \quad (r \rightarrow 0) \end{aligned}$$

или

$$\Delta w_1 = \frac{iC'\pi}{1+\lambda} + O(r) \quad (r \rightarrow 0). \quad (3.216)$$

Сравнивая (3.215) и (3.216), находим

$$h_1 = -\frac{C'\pi}{1+\lambda}. \quad (3.217)$$

Разделив (3.214) на (3.217), определяем постоянную  $\lambda$

$$\lambda = \frac{h_2}{h_1}, \quad (3.218)$$

после чего легко находим

$$C' = \frac{-h_1(1+\lambda)}{\pi} = \frac{h_1+h_2}{\pi}. \quad (3.219)$$

Выполняя интегрирование, представим отображающую функцию в виде

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^z \frac{z dz}{(\lambda+z)(1-z)} = \frac{C'}{1+\lambda} \int_0^z \left( \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+\frac{z}{\lambda}} \right) dz = \\ &= -\frac{C'}{1-\lambda} \left[ \ln(1-z) + \lambda \ln \left( 1 + \frac{z}{\lambda} \right) \right]. \end{aligned}$$

Учитывая значения определенных выше констант  $C'$  и  $\lambda$ , запишем окончательно функцию, реализующую конформное отображение

полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  на горизонтальную полосу с разрезом по действительной отрицательной оси, в следующем виде:

$$w = \frac{h_1}{\pi} \ln(1-z) + \frac{h_2}{\pi} \ln\left(1 + \frac{h_1}{h_2} z\right). \quad (3.220)$$

Здесь, как и в предыдущих случаях, берется главное значение логарифмической функции (см. п. 6).

## § 6. Отображение пятиугольников

55. Пятиугольник  $\left\{\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ . Рассматривая простейшие примеры отображения пятиугольников, мы увидим, что задача отображения многоугольников, имеющих пять и больше вершин, представляет значительные трудности.

Будем искать функцию, отображающую верхнюю полуплоскость  $z$  (рис. 102, а) на пятиугольник  $\left\{\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ , изображенный на рис. 102, б. Удобно принять следующее соответствие точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$l + iH$	$\frac{3}{2}$
2	$-\frac{1}{n}$	$\infty$	0
3	0	0	$\frac{1}{2}$
4	1	$L$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{m^2}$	$L + iH$	$\frac{1}{2}$

(3.221)

Следовательно, интеграл Кристоффеля — Шварца запишется в виде

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^z \left(z + \frac{1}{n}\right)^{-1} z^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{-\frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dz = \\ &= C \int_0^z \frac{nmdz}{(1+nz) \sqrt{z(1-z)(1-m^2z)}} \end{aligned} \quad (3.222)$$

( $C_1 = 0$  в силу соответствия точек  $k = 3$ ).

Введем новую переменную интегрирования посредством подстановки

$$\zeta = \sqrt{z}. \quad (3.223)$$

Функция (3.223) отображает исходную полуплоскость  $z$  на первый квадрант (рис. 102, а).

Проделав замену переменных в интеграле (3.222), найдем функцию, отображающую первый квадрант  $\zeta$  на пятиугольник  $w$ ,

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^\zeta \frac{2nm\zeta d\zeta}{(1+n\zeta^2)\zeta \sqrt{(1-\zeta^2)(1-m^2\zeta^2)}} = \\ &= C_1 \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{(1+n\zeta^2)\sqrt{(1-\zeta^2)(1-m^2\zeta^2)}} \\ w &= C_1 \Pi(\zeta, m, n), \end{aligned} \quad (3.224)$$

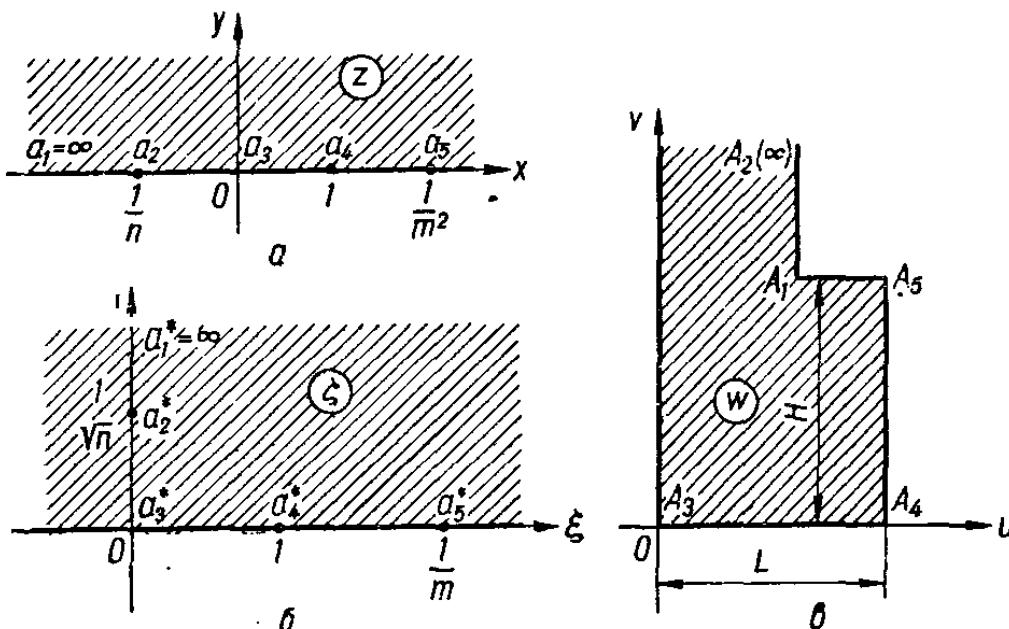


Рис. 102.

где  $\Pi(\zeta, m, n)$  — эллиптический интеграл III рода с модулем  $m$  и параметром  $n$ .

Найдем постоянную  $C_1$  из соответствия точек  $k = 4$

$$L = C_1 \int_0^1 \frac{d\zeta}{(1+n\zeta^2)\sqrt{(1-\zeta^2)(1-m^2\zeta^2)}} = C_1 \Pi(m, n), \quad (3.225)$$

где  $\Pi(m, n)$  — полный эллиптический интеграл III рода с модулем  $m$  и параметром  $n$ .

Определив из (3.225) постоянную  $C_1$  и подставив ее в (3.224), перешем искомую отображающую функцию в окончательном виде:

$$w = \frac{L}{\Pi(m, n)} \Pi(\zeta, m, n). \quad (3.226)$$

Определим теперь постоянные  $m$  и  $n$ . Воспользовавшись соответствием очек  $k = 5$ , равенством (3.226) и соотношением (3.67), получим

$$\begin{aligned} L + iH &= \frac{L}{\Pi(m, n)} \Pi\left(\frac{1}{m}; m, n\right) = \\ &= \frac{L}{\Pi(m, n)} \left[ \Pi(m, n) + i \frac{m^2}{n+m^2} \Pi(m', n') \right], \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{H}{L} = \frac{m^2}{n+m^2} \cdot \frac{\Pi(m', n')}{\Pi(m, n)}, \quad (3.227)$$

где

$$m' = \sqrt{1-m^2}; \quad n' = -\frac{nm'^2}{n+m^2}. \quad (3.228)$$

Соответствие точек  $k=1$  дает

$$\begin{aligned} l+iH &= \frac{L}{\Pi(m, n)} \int_0^\zeta \frac{d\xi}{(1+n_\xi^2) \sqrt{(1-\xi^2)(1-m^2\xi^2)}} = \\ &= \frac{L}{\Pi(m, n)} \left[ \Pi\left(\frac{1}{m}, m, n\right) + \int_{\frac{1}{m}}^\infty \frac{d\xi}{(1+n_\xi^2) \sqrt{(1-\xi^2)(1-m^2\xi^2)}} \right] = \\ &= L + iH + \frac{L}{\Pi(m, n)} \int_{\frac{1}{m}}^\infty \frac{d\xi}{(1+n_\xi^2) \sqrt{(1-\xi^2)(1-m^2\xi^2)}}. \end{aligned}$$

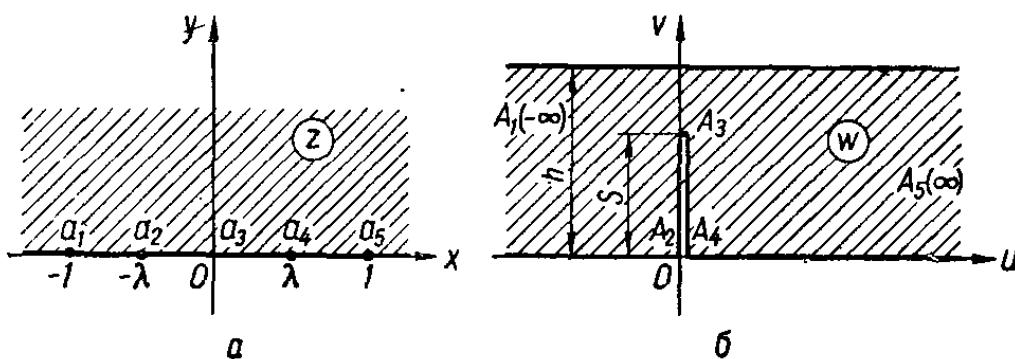


Рис. 103.

Произведя в последнем интеграле подстановку

$$\zeta = \frac{1}{mt}, \quad (3.229)$$

получим

$$l = L + \frac{L}{\Pi(m, n)} [K(m) - \Pi(m, n'')]$$

или

$$\frac{l}{L} = 1 + \frac{K(m) - \Pi(m, n'')}{\Pi(m, n)}, \quad (3.230)$$

где

$$n'' = \frac{m^2}{n}. \quad (3.231)$$

Задавая произвольные значения  $m$  и  $n$ , при помощи формул (3.227) и (3.230) можно найти соответствующие параметры пятиугольника  $H$  и  $l$  волях  $L$ .

56. Пятиугольник  $\left\{0; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}; 0\right\}$ . В качестве следующего примера, довольно часто встречающегося в практике применения конформных отображений, рассмотрим отображение полу平面  $z$  на пятиугольник  $\left\{0; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}; 0\right\}$ , изображенный на рис. 103, б.

Удобно принять следующее симметричное относительно мнимой оси соответствие точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	-1	$-\infty$	0
2	$-\lambda$	0	$\frac{1}{2}$
3	0	$iS$	2
4	$\lambda$	0	$\frac{1}{2}$
5	1	$\infty$	0

(3.232)

Интеграл Кристоффеля — Шварца принимает вид

$$w = C \int_{\lambda}^z (z+1)^{-1} (z+\lambda)^{-\frac{1}{2}} z (z-\lambda)^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{-1} dz + C_1$$

или

$$w = C \int_{\lambda}^z \frac{z dz}{(z^2 - 1) \sqrt{z^2 - \lambda^2}}. \quad (3.233)$$

Постоянная  $C_1 = 0$  в силу соответствия точек  $k = 4$ . Найдем постоянную  $C$  уже известным из предыдущих примеров способом, определив приращение функции (3.233) при обходе точкой  $z$  полуокружности  $\gamma_r$  с центром в  $z = 1$ . Тогда, с одной стороны, легко найдем

$$\Delta w = ih + O(r), \quad (3.234)$$

когда  $r \rightarrow 0$ .

С другой стороны, учитывая представление (3.233) и то, что полуокружность  $\gamma_r$  имеет уравнение  $z = re^{i\theta} + 1$  ( $\pi \geq \theta \geq 0$ ), получим

$$\begin{aligned} \Delta w &= C \int_{\gamma_r} \frac{z dz}{(z^2 - 1) \sqrt{z^2 - \lambda^2}} = \\ &= C \int_{\pi}^0 \frac{(re^{i\theta} + 1) rie^{i\theta} d\theta}{[(re^{i\theta} + 1)^2 - 1] \sqrt{(re^{i\theta} + 1)^2 - \lambda^2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Ci \int_{\pi}^0 \frac{re^{i\theta} (re^{i\theta} + 1) d\theta}{re^{i\theta} (re^{i\theta} + 2) \sqrt{(re^{i\theta} + 1)^2 - \lambda^2}} = \\
&= Ci \int_{\pi}^0 \frac{(re^{i\theta} + 1) d\theta}{(re^{i\theta} + 2) \sqrt{(re^{i\theta} + 1) - \lambda^2}} = \\
&= Ci \int_{\pi}^0 \frac{d\theta}{2\sqrt{1 - \lambda^2}} + O(r) = \frac{Ci}{2\sqrt{1 - \lambda^2}} \int_{\pi}^0 d\theta + O(r) = \\
&= \frac{-Ci\pi}{2\sqrt{1 - \lambda^2}} + O(r).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta w = \frac{-Ci\pi}{2\sqrt{1 - \lambda^2}} + O(r) \quad (r \rightarrow 0). \quad (3.235)$$

Сравнивая (3.234) и (3.235), найдем

$$C = \frac{-2h\sqrt{1 - \lambda^2}}{\pi}. \quad (3.236)$$

Сделав подстановку  $\sqrt{z^2 - \lambda^2} = t$ , проинтегрируем правую часть (3.233):

$$\begin{aligned}
w &= -\frac{2h\sqrt{1 - \lambda^2}}{\pi} \int_{\lambda}^z \frac{z dz}{(z^2 - 1)\sqrt{z^2 - \lambda^2}} = \\
&= -\frac{2h\sqrt{1 - \lambda^2}}{\pi} \int_0^t \frac{dt}{t^2 + (\lambda^2 - 1)} = \\
&= \frac{2h\sqrt{1 - \lambda^2}}{\pi} \int_0^t \frac{dt}{(1 - \lambda^2) - t^2} = \frac{2h\sqrt{1 - \lambda^2}}{\pi\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{Arth} \frac{t}{\sqrt{1 - \lambda^2}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, исковую отображающую функцию можно записать в таком виде:

$$w = \frac{2h}{\pi} \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{z^2 - \lambda^2}}{\sqrt{1 - \lambda^2}}. \quad (3.237)$$

Постоянную  $\lambda$  найдем из равенства (3.237), используя соответствие точек  $k = 3$ , а также соотношения (1.166) и (1.186),

$$iS = \frac{2hi}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} = \frac{2hi}{\pi} \operatorname{arcsin} \lambda,$$

откуда

$$\lambda = \sin \frac{\pi S}{2h} \quad (3.238)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{1 - \lambda^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi S}{2h}} = \cos \frac{\pi S}{2h}. \quad (3.239)$$

Учитывая (3.238) и (3.239), отображающую функцию запишем в следующем окончательном виде:

$$w = \frac{2h}{\pi} \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{z^2 - \sin^2 \frac{\pi S}{2h}}}{\cos \frac{\pi S}{2h}}. \quad (3.240)$$

Обращая (3.240), найдем функцию, отображающую бесконечную горизонтальную полосу с разрезом длины  $S$  (см. рис. 103, б) на верхнюю полуплоскость

$$z = \cos \frac{\pi S}{2h} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi S}{2h} + \operatorname{th}^2 \frac{\pi w}{2h}}. \quad (3.241)$$

**57. Пятиугольник**  $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right\}$ . Рассмотрим отображение верхней полуплоскости  $z$  на пятиугольник  $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right\}$ , представляющий собой квадрант с прямолинейным вертикальным разрезом длины  $S$  (рис. 104, а, б).

Отображающую функцию ищем, приняв следующее соответствие точек:

$k$	$a_k$	$A_k$	$\alpha_k$
1	$\infty$	$\infty$	$-\frac{1}{2}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$
3	1	$l$	$\frac{1}{2}$
4	$\lambda^2$	$l + iS$	2
5	$\frac{1}{m^2}$	$l$	$\frac{1}{2}$

(3.242)

После чего запишем исковую функцию через интеграл Кристоффеля—Шварца:

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^z z^{-\frac{1}{2}} (z-1)^{-\frac{1}{2}} (z-\lambda^2) \left(z - \frac{1}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dz = \\ &= C \int_0^z \frac{(z-\lambda^2) dz}{\sqrt{z(z-1)\left(z - \frac{1}{m^2}\right)}}, \end{aligned} \quad (3.243)$$

где  $C_1 = 0$  в силу соответствия точки  $k = 2$ .

Преобразуем отображающую функцию (3.243) к новой переменной при помощи подстановки

$$\zeta = V \bar{z} \quad (3.244)$$

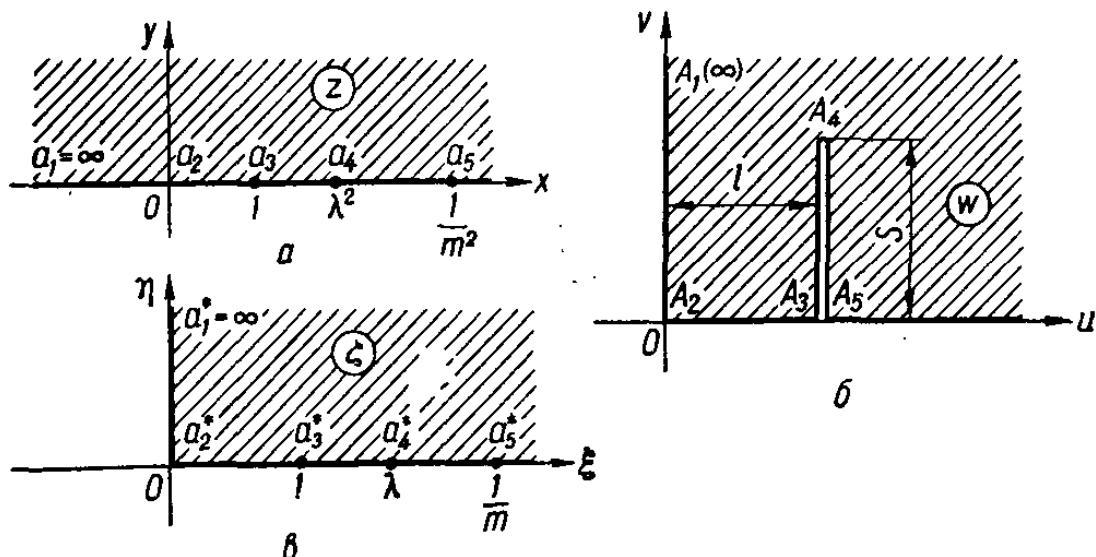


Рис. 104.

— вспомогательное отображение, которое верхнюю полуплоскость  $z$  переводит в первый квадрант  $\zeta$  (рис. 104, b).

Тогда

$$\begin{aligned} w &= C \int_0^\zeta \frac{2m(\zeta^2 - \lambda^2) \zeta d\zeta}{V \zeta^2 (\zeta^2 - 1) (m^2 \zeta^2 - 1)} = \frac{2C}{m} \int_0^\zeta \frac{m^2 (\zeta^2 - \lambda^2) d\zeta}{V (1 - \zeta^2) (1 - m^2 \zeta^2)} = \\ &= \frac{2C}{m} \left[ \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{V (1 - \zeta^2) (1 - m^2 \zeta^2)} - \int_0^\zeta \sqrt{\frac{1 - m^2 \zeta^2}{1 - \zeta^2}} d\zeta - \right. \\ &\quad \left. - \lambda^2 m^2 \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{V (1 - \zeta^2) (1 - m^2 \zeta^2)} \right] \end{aligned}$$

или

$$w = \frac{2C}{m} [(1 - \lambda^2 m^2) F(\zeta, m) - E(\zeta, m)], \quad (3.245)$$

где  $F(\zeta, m)$  и  $E(\zeta, m)$  — соответственно эллиптические интегралы I и II рода с модулем  $m$ .

Неизвестные константы  $C$  и  $\lambda$  определим из соответствия точек  $k = 3$  и  $k = 5$ .

При  $k = 3$  из (3.245) получим

$$\begin{aligned} l &= \frac{2C}{m} [(1 - \lambda^2 m^2) F(1, m) - E(1, m)] = \\ &= \frac{2C}{m} [(1 - \lambda^2 m^2) K - E], \end{aligned} \quad (3.246)$$

а при  $k = 5$ , используя формулы (3.56) и (3.58), получим

$$l = \frac{2C}{m} \left[ (1 - \lambda^2 m^2) F\left(\frac{1}{m}, m\right) - E\left(\frac{1}{m}, m\right) \right] = \\ = \frac{2C}{m} [(1 - \lambda^2 m^2) K - E] + i \frac{2C}{m} [(1 - \lambda^2 m^2) K' - (K' - E')]. \quad (3.247)$$

Приравнивая правые части (3.246) и (3.247), найдем

$$\lambda = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{E'}{K'}}. \quad (3.248)$$

Подставив (3.248) в (3.246) и используя зависимость Лежандра (3.55), определим константу  $C$ :

$$l = \frac{2C}{m} \left[ \left(1 - \frac{E'}{K}\right) K - E \right] = -\frac{C\pi}{mK'},$$

откуда

$$C = -\frac{mlK'}{\pi}. \quad (3.249)$$

Подставляя значения постоянных (3.248) и (3.249) в (3.245), найдем в окончательном виде функцию, отображающую первый квадрант  $z$  на первый квадрант с разрезом  $\zeta$  (см. рис. 104),

$$w = \frac{2l}{\pi} [K'E(\zeta, m) - (K' - E')F(\zeta, m)]. \quad (3.250)$$

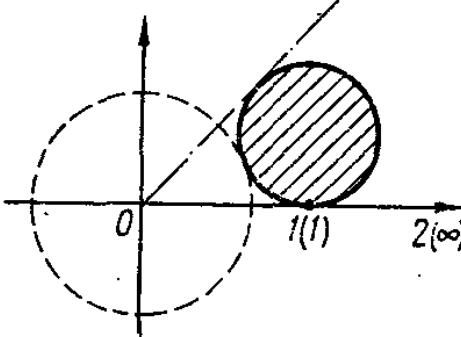
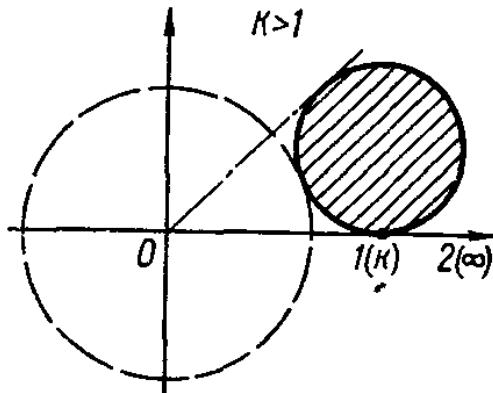
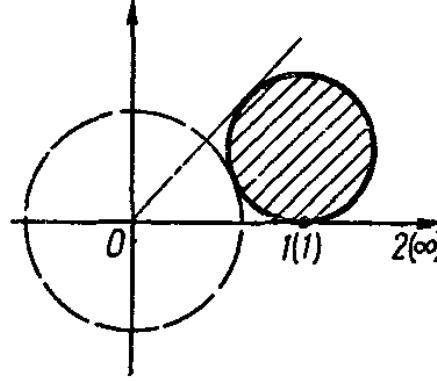
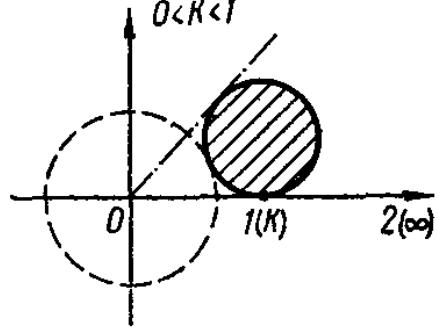
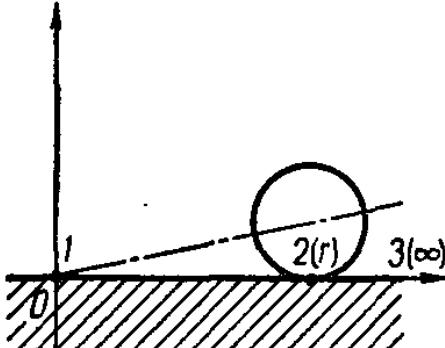
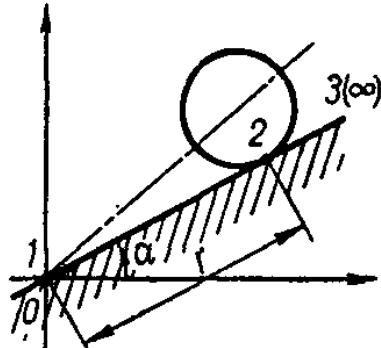
Следовательно, искомая функция имеет вид

$$w = \frac{2l}{\pi} [K'E(\sqrt{z}, m) - (K' - E')F(\sqrt{z}, m)], \quad (3.251)$$

где модуль  $m$  определяется из соотношения (3.248).

В прилагаемом каталоге конформных отображений приводятся не только те отображающие функции, которые были рассмотрены во второй и третьей главах, но и некоторые другие, весьма часто используемые в многочисленных приложениях.

**КАТАЛОГ  
КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ**

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
1	$w = kz;$ $(k \text{ --- действительное число})$	$z = \frac{1}{k} w$	6, 20
1.1			
1.2			
2	$w = e^{i\alpha} z;$ $(\alpha \text{ --- действительное число})$	$z = e^{-i\alpha} w$	20
2.1			
3	$w = z + b$ $(b = \alpha + i\beta);$	$z = w - b$	20

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
3.1			
4	$w = az + b$ ( $a = re^\Phi$ ; $b = \alpha + i\beta$ );	$z = \frac{w - b}{a}$	20
4.1			
5	$w = \frac{1}{z}$ ;	$z = \frac{1}{w}$	2, 21
5.1			
5.2			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
5.3	<p>Diagram illustrating the mapping of the unit disk <math> z-z_0 = z_0 </math> in the <math>z</math>-plane onto the right half-plane <math>\operatorname{Re}(zw)=1/2</math> in the <math>w</math>-plane. The <math>z</math>-plane has a shaded unit disk centered at <math>(z_0)</math> with radius <math> z_0 </math>. The <math>w</math>-plane shows the right half-plane with a vertical axis labeled from -3 to 3, and a diagonal line <math>\operatorname{Re}(zw)=1/2</math> passing through the origin. The intersection of the disk boundary and the line is marked with point <math>l(\infty)</math>.</p>	<p>Diagram illustrating the mapping of the unit disk <math> z-z_0 =r, (z_0 &lt; r)</math> in the <math>z</math>-plane onto the annulus <math> w-\frac{z_0}{ z_0 ^2-r^2}  = \frac{r}{ z_0 ^2-r^2}</math> in the <math>w</math>-plane. The <math>z</math>-plane has a shaded disk centered at <math>(z_0)</math> with radius <math>r</math>. The <math>w</math>-plane shows a shaded annulus with an inner circle of radius 1 and an outer circle of radius 2, centered at <math>(w_0)</math>. The formula for the mapping is given as <math> w-\frac{z_0}{ z_0 ^2-r^2}  = \frac{r}{ z_0 ^2-r^2}</math>.</p>	
5.5	<p>Diagram illustrating the mapping of the unit disk <math> z-z_0 =r, (r &lt; r_0)</math> in the <math>z</math>-plane onto the annulus <math> w-\frac{z_0}{ z_0 ^2-r^2}  = \frac{r}{ z_0 ^2-r^2}</math> in the <math>w</math>-plane. The <math>z</math>-plane has a shaded disk centered at <math>(z_0)</math> with radius <math>r</math>. The <math>w</math>-plane shows a shaded annulus with an inner circle of radius 1 and an outer circle of radius 2, centered at 0. The formula for the mapping is given as <math> w-\frac{z_0}{ z_0 ^2-r^2}  = \frac{r}{ z_0 ^2-r^2}</math>.</p>		

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
5.6			
5.7			
5.8			
5.9			

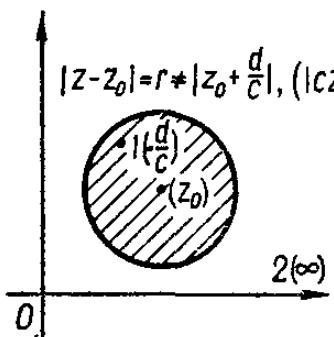
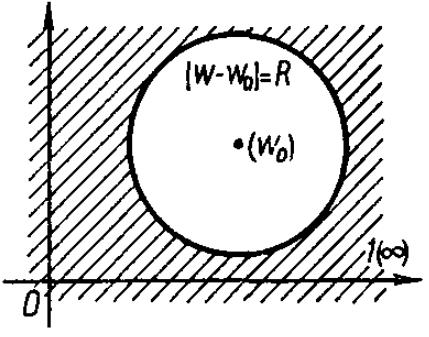
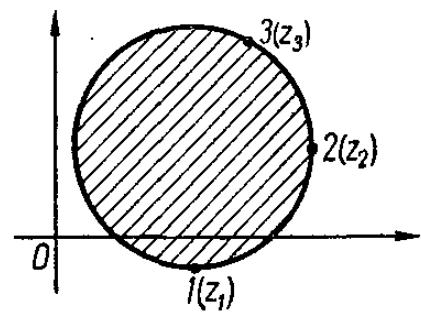
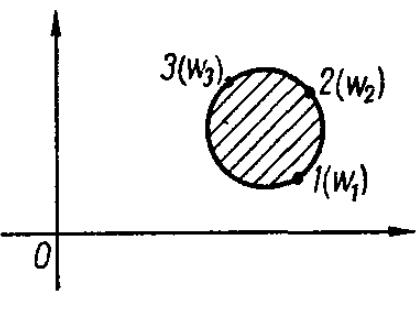
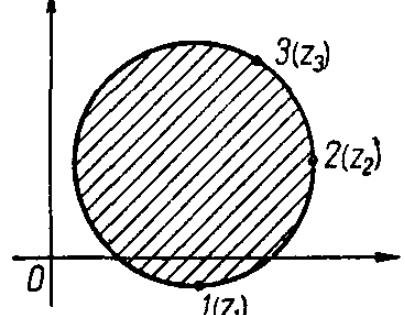
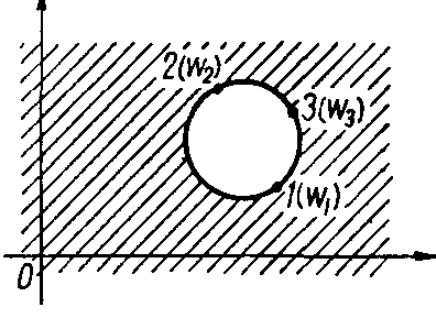
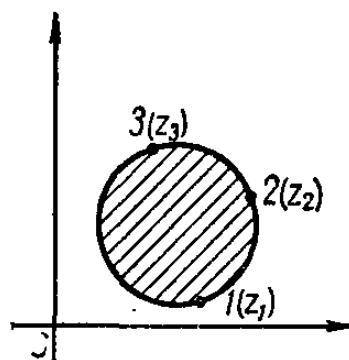
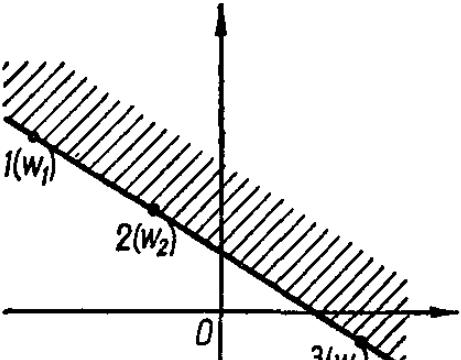
*Продолжение*

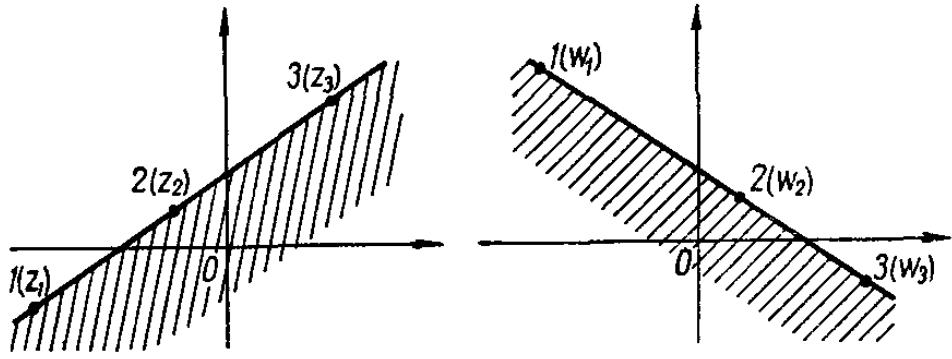
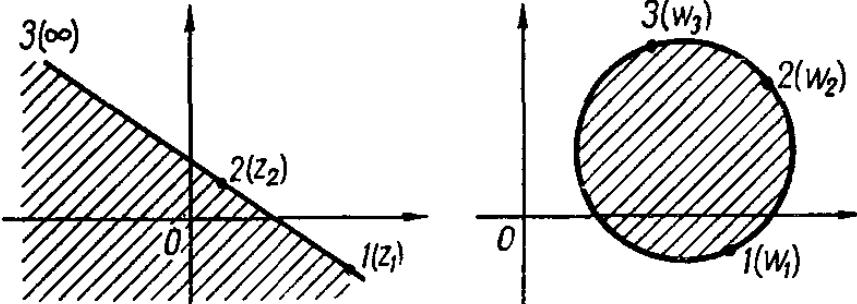
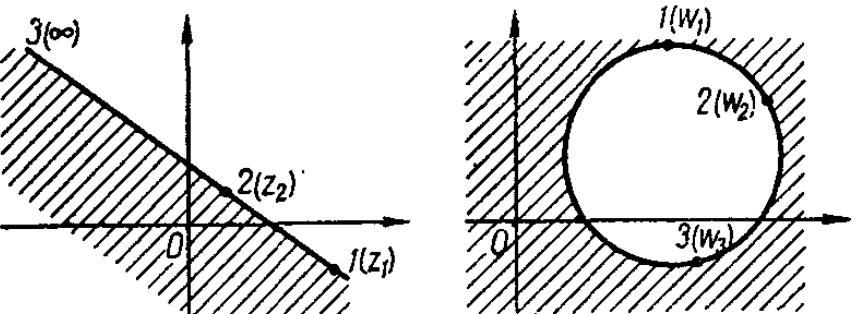
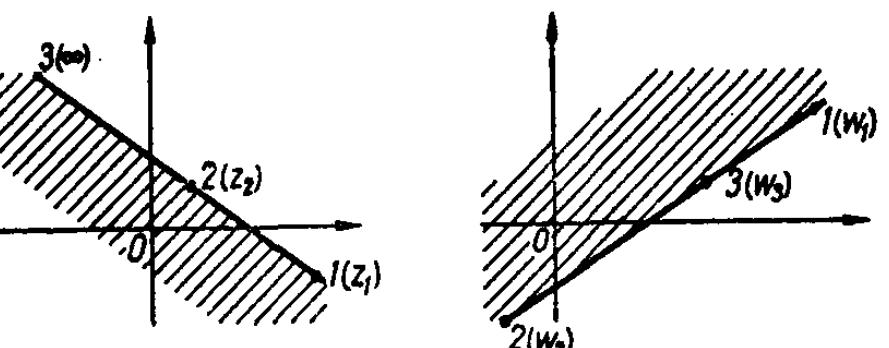
Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
5.10	<p><math> z-z_0 = z_0 </math></p> <p><math>Re(\bar{\lambda}z)=0</math></p>	<p><math>Re(z_w) = \frac{1}{2}</math></p> <p><math>Re(\bar{\lambda}w)=0</math></p>	
5.11	<p><math>Re(\bar{\lambda}z)=p</math></p> <p><math> z-z_0 =r, (r &lt;  z_0 )</math></p>	$\left  w - \frac{\bar{\lambda}}{2p} \right  = \left  \frac{\bar{\lambda}}{2p} \right $ $\left  w - \frac{\bar{z}_0}{ z_0 ^2 - r^2} \right  = \frac{r}{ z_0 ^2 - r^2}$	
5.12	<p><math> z-z_0 =r, (r &gt;  z_0 )</math></p>	$\left  w - \frac{z_0}{ z_0 ^2 - r^2} \right  = \frac{r}{ z_0 ^2 - r^2}$ $\left  w - \frac{\bar{\lambda}}{2p} \right  = \left  \frac{\bar{\lambda}}{2p} \right $	

Номер	Стобирающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
5.13	<p><math> z-z_0 =r, (r&gt; z_0 )</math></p> <p><math>Re(\bar{z})=p</math></p>	<p><math>W - \frac{\bar{\lambda}}{2p} = \frac{ \lambda }{ 2p } \cdot 2</math></p> <p><math>W - \frac{\bar{z}_0}{ z_0 ^2 - r^2} = \frac{r}{  z_0 ^2 - r^2 }</math></p>	
5.14			
5.15			
5.16	<p><math>Re(\bar{z})=p_1</math></p> <p><math>Re(\bar{z}_2)=p_2</math></p> <p><math>y=p_3</math></p> <p><math>y=p_4</math></p>		

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
5.17			
6	$w = \frac{az + b}{cz + d};$	$z = \frac{d\bar{w} - b}{-c\bar{w} + a}$	6, 22, 23
6.1			
6.2			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
6.3			
	$W_0 = \frac{2ap\bar{c} + a\bar{d}\lambda + b\bar{c}\bar{\lambda}}{2p c ^2 + c\bar{d}\lambda + \bar{c}d\bar{\lambda}} ; \quad R = \left  \frac{(ad-bc)\lambda}{2p c ^2 + 2Re cd\bar{\lambda}} \right $		
6.4			
	$\Lambda = \frac{bc-ad}{c(cz_0+d)} ; \quad \rho = \frac{- ad-bc ^2 - 2Re[c(az_0+b)(ad-bc)]}{2 c(cz_0+d) ^2}$		
6.5			
	$W_0 = \frac{(az_0+b)(\bar{c}z_0+\bar{d}) - a\bar{c}r^2}{ cz_0+d ^2 -  c ^2r^2} ; \quad R = \frac{r ad-bc }{  cz_0+d ^2 -  c ^2r^2 }$		

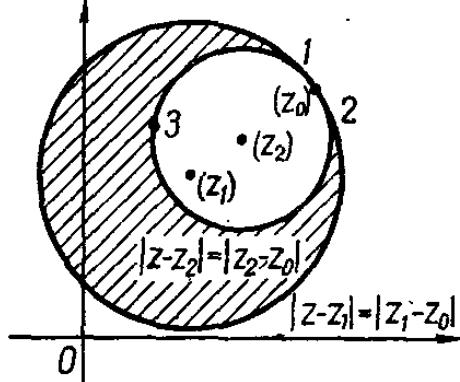
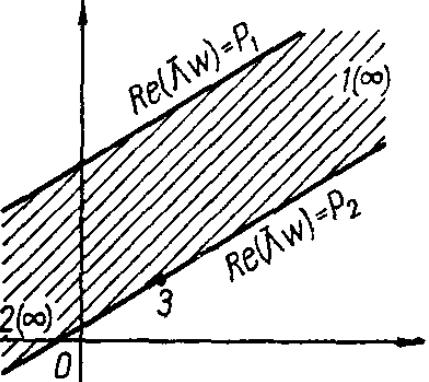
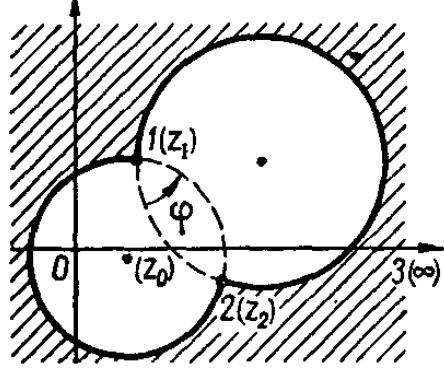
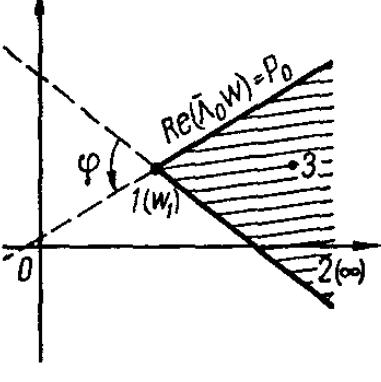
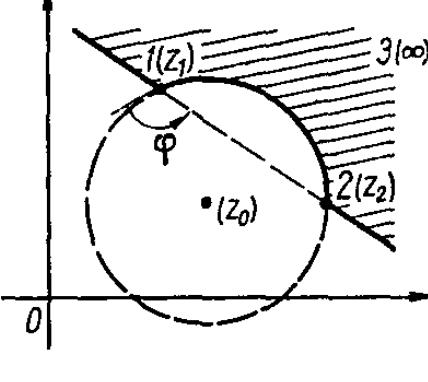
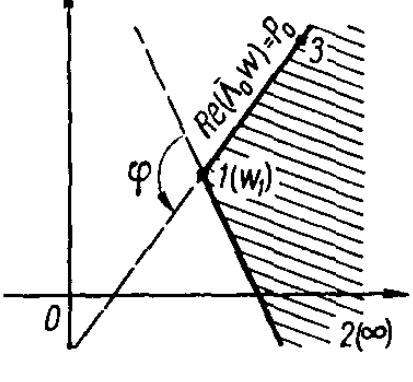
Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
6.6	 $ z - z_0  = r *  z_0 + \frac{d}{c} , ( cz_0 + d  < r c )$ $w_0 = \frac{(az_0 + b)(\bar{c}z_0 + d) - a\bar{c}r^2}{ cz_0 + d ^2 -  c ^2r^2}; \quad R = \frac{r ad - bc }{  cz_0 + d ^2 -  c ^2r^2 }$	 $ w - w_0  = R$	
7	$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$		22
7.1			
7.2			
7.3			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
7.4			
8	$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}$		22
8.1			
8.2			
8.3			
9	$\frac{w - w_3}{w_3 - w_1} = \frac{z_2 - z_1}{z - z_2}$		22

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
9.1			
10	$\frac{w - w_1}{w_1 - w_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}$		22
10.1			
11	$\bar{\Lambda} w = P + \frac{\alpha (\bar{\lambda} z - p) - i\beta}{i\gamma (\bar{\lambda} z - p) + \delta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ --- действ., } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$		22
11.1			
11.2			

Номер	Стобржающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
12	$w - w_0 = R_0 e^{i\varphi} \frac{\bar{\lambda}z - p + b}{\bar{\lambda}z - p - b}$ ( $\operatorname{Re} b \neq 0$ , $\varphi$ — действ.)		22
12.1			
13	$w - w_0 = R_0 e^{i\varphi} \frac{z - z_0 - ar_0}{az - az_0 - r_0}$ ( $\varphi$ — действ., $ a  \neq 1$ )		22
13.1			
13.2			
14	$(w - z_0)(z - z_0) = \alpha e^{i(\varphi + 2\tau)}$ ( $\varphi, \tau$ — действ.)		22

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
14.1			
14.2			
15	$\bar{\Lambda}w = P_2 + i\beta + \frac{2(z_1 - z_0)(P_1 - P_2)}{z - z_0}$ <p>(<math>\beta, P_1, P_2</math> — действ.)</p>		
15.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
16	$\Lambda w = P_1 + i\beta + \frac{ z_2 - z_0 }{( z_1 - z_0  -  z_2 - z_0 )} \frac{(z + z_0 - 2z_1)(P_2 - P_1)}{(z_0 - z)}$ ( $\beta$ — действительное число)		22, 25
16.1			
17	$w - w_1 = k \Lambda_0 \frac{(z - z_1)(z_0 - z_2)}{(z - z_2)(z_1 - z_2)}$ ( $k$ — действительное число, причем $k \neq 0$ )		22, 25
17.1			
17.2			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
18	$w - w_1 = R_1 e^{i\theta} \frac{ \lambda  (z - z_0) - \lambda (\alpha + \beta)}{ \lambda  (z - z_0) - \lambda (\alpha - \beta)},$ $\alpha = \frac{p - Re(\bar{\lambda} z_0)}{ \lambda }, \beta = \pm \sqrt{\alpha^2 - r_0^2}$ ( $\theta$ — действ.)		22, 23, 24, 25
18.1	<p>The diagram shows two complex planes. The left plane (z-plane) has a shaded semi-infinite strip labeled III. A circle labeled I with center <math>(z_0)</math> and radius <math> z - z_0  = r_0</math> is inside the strip. A diagonal line segment connects the origin <math>O</math> to the point where the strip's boundary intersects the positive real axis, with the label <math>Re(\bar{\lambda} z) = p</math>. The right plane (w-plane) shows a shaded circle labeled II with center <math>(w_1)</math> and radius <math> w - w_1  = R_1</math>. Inside it is another circle labeled III with center <math>(w_1)</math> and radius <math> w - w_1  = p</math>.</p>		
18.2	<p>The diagram shows two complex planes. The left plane (z-plane) has a shaded semi-infinite strip labeled III. A circle labeled I with center <math>(z_0)</math> and radius <math> z - z_0  = r_0</math> is inside the strip. A diagonal line segment connects the origin <math>O</math> to the point where the strip's boundary intersects the positive real axis, with the label <math>Re(\bar{\lambda} z) = p</math>. The right plane (w-plane) shows a shaded circle labeled II with center <math>(w_1)</math> and radius <math> w - w_1  = R_1</math>. Inside it is another circle labeled III with center <math>(w_1)</math> and radius <math> w - w_1  = p</math>.</p> <p><math>p = \frac{r_0 R_1}{ \alpha + \beta }, (r_0 &gt;  \alpha + \beta )</math></p>		
19	$w - w_0 = e^{i\theta} \frac{\alpha R_1 [(z - z_1)  z_2 - z_1  - (z_2 - z_1)\beta]}{r_1 [(z - z_1)  z_2 - z_1  - (z_2 - z_1)\alpha]},$ $\alpha\beta = r_1^2; \alpha + \beta = \frac{r_2^2 - r_1^2 -  z_2 - z_1 ^2}{ z_2 - z_1 }$		22, 23, 24, 25
19.1	<p>The diagram shows two complex planes. The left plane (z-plane) has two nested circles labeled I and II. The outer circle I has center <math>(z_1)</math> and radius <math> z - z_1  = r_1</math>. The inner circle II has center <math>(z_2)</math> and radius <math> z - z_2  = r_2</math>. The right plane (w-plane) shows two nested circles labeled I and II. The outer circle I has center <math>(w_0)</math> and radius <math> w - w_0  = R_2</math>. The inner circle II has center <math>(w_0)</math> and radius <math> w - w_0  = R_1</math>.</p> <p><math>\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} \left  \frac{\alpha}{ r_2 - r_1  - \alpha} \right </math></p>		

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
19.2		$ z-z_2 =r_2$ $ z-z_1 =r_1$ $(z_2)$ $(z_1)$ $R_1 = \frac{r_1}{r_2} \left  \frac{\alpha}{ r_2 - r_1  - \alpha} \right $	$ w-w_0 =R_2$ $(w_0)$ $I$ $II$ $III$
19.3		$ z-z_1 =r_1$ $(z_1)$ $ z-z_2 =r_2$ $(z_2)$ $II$ $III$	$ w-w_0 =R_2$ $(w_0)$ $I$ $II$ $III$
		$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} \left  \frac{\alpha}{ r_2 - r_1  - \alpha} \right $	
20	$w = \frac{z - \alpha}{\alpha z - 1};$ $\alpha = \frac{1 + x_1 x_2 + \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}}{x_1 + x_2}$	$z = \frac{w - \alpha}{\alpha w - 1};$	22, 25
20.1		$l(x_1)$ $2(x_2)$ $0$ $3(-i)$ $4(-i)$ $5(l)$	$6$ $5(-i)$ $3$ $4$ $2(R)$
		$R = \frac{l - x_1 x_2 + \sqrt{(l - x_1^2)(l - x_2^2)}}{x_1 - x_2}, \quad (x_2 < x_1)$	

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
20.2	 Two circles in the $z$ -plane are centered at $z_1 = 1$ and $z_2 = 2$ . The region between them is shaded. Their images in the $w$ -plane are two circles centered at $w_1 = 2$ and $w_2 = 1$ , with the region between them shaded. Points on the boundary are labeled: $6(i)$ , $5(-i)$ , $3(i)$ , $4(-i)$ on the left circle; and $6$ , $5(i)$ , $4$ , $1$ on the right circle. $r = \frac{x_1 x_2 - 1 - \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}}{x_1 - x_2}, \quad (x_2 < x_1)$	 Two circles in the $z$ -plane are centered at $z_1 = 1$ and $z_2 = 2$ . The region between them is shaded. Their images in the $w$ -plane are two circles centered at $w_1 = 2$ and $w_2 = 1$ , with the region between them shaded. Points on the boundary are labeled: $6(i)$ , $5(-i)$ , $3(i)$ , $4(-i)$ on the left circle; and $6$ , $5(i)$ , $4$ , $1$ on the right circle. $r = \frac{x_1 x_2 - 1 - \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}}{x_1 - x_2}, \quad (x_2 < x_1)$	
21	$w = z^2;$	$z = \sqrt{w}$	28, 2
21.1	 The $z$ -plane shows a sector $\arg z = \varphi$ for $\varphi < \pi$ with radius $ z  = r$ . The $w$ -plane shows the image of this sector, which is a sector $\arg w = 2\varphi$ with radius $ w  = r^2$ .	 The $z$ -plane shows a sector $\arg z = \varphi$ for $\varphi < \pi$ with radius $ z  = r$ . The $w$ -plane shows the image of this sector, which is a sector $\arg w = 2\varphi$ with radius $ w  = r^2$ .	
21.2	 The $z$ -plane shows a sector $\arg z = \varphi = \pi$ with radius $ z  = r$ . The $w$ -plane shows the image of this sector, which is a sector $\arg w = 2\varphi = 2\pi$ with radius $ w  = r^2$ .	 The $z$ -plane shows a sector $\arg z = \varphi = \pi$ with radius $ z  = r$ . The $w$ -plane shows the image of this sector, which is a sector $\arg w = 2\varphi = 2\pi$ with radius $ w  = r^2$ .	

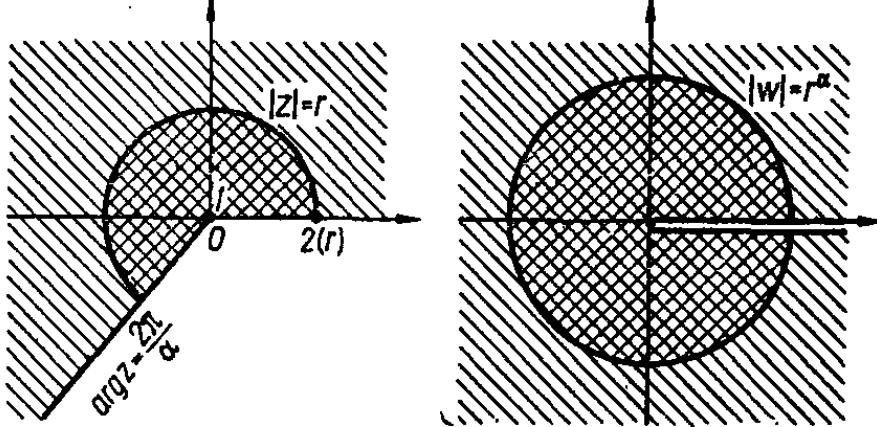
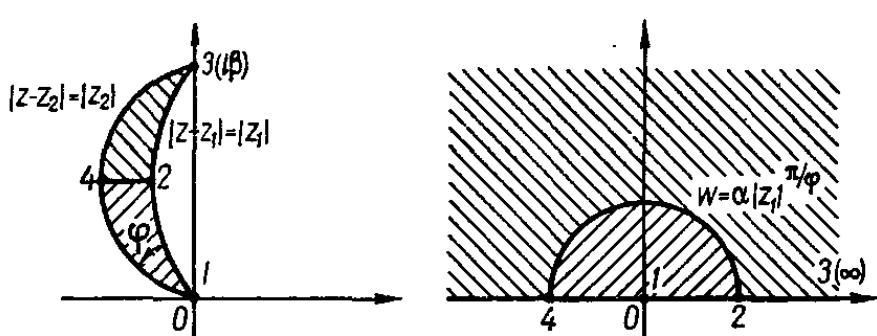
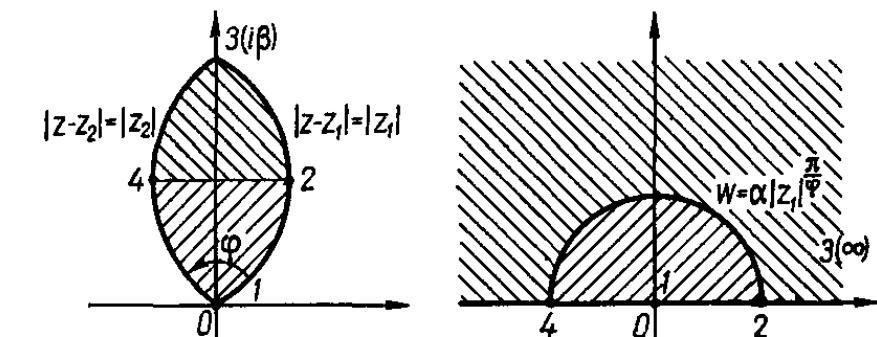
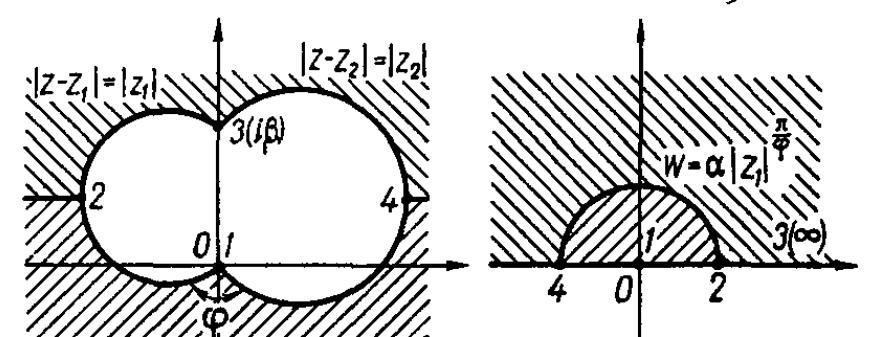
Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
21.3			
21.4			
21.5			
21.6			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
21.7	<p><math>p&gt;0</math></p> <p><math>q&gt;0</math></p> <p><math>x=p</math></p> <p><math>y=q</math></p> <p><math>\arg z = \varphi_1</math></p> <p><math>\arg w = 2\varphi_2</math></p>	<p><math>p&gt;0</math></p> <p><math>q&gt;0</math></p> <p><math>x=p</math></p> <p><math>y=q</math></p> <p><math>\arg z = \varphi_1</math></p> <p><math>\arg w = 2\varphi_2</math></p>	
21.8	<p><math>p&gt;0</math></p> <p><math>q&gt;0</math></p> <p><math> z =r</math></p> <p><math>y^2 = -4p^2(u-p^2)</math></p> <p><math>v^2 = 4q^2(u+q^2)</math></p> <p><math> w =r^2</math></p>	<p><math>p&gt;0</math></p> <p><math>q&gt;0</math></p> <p><math> z =r</math></p> <p><math>y^2 = -4p^2(u-p^2)</math></p> <p><math>v^2 = 4q^2(u+q^2)</math></p> <p><math> w =r^2</math></p>	
21.9	<p><math>p&gt;0</math></p> <p><math>q&gt;0</math></p> <p><math>x&gt;0</math></p> <p><math>y=q</math></p> <p><math>\arg z = \pi/2</math></p> <p><math>\arg w = \pi/2</math></p>	<p><math>p&gt;0</math></p> <p><math>q&gt;0</math></p> <p><math>x&gt;0</math></p> <p><math>y=q</math></p> <p><math>\arg z = \pi/2</math></p> <p><math>\arg w = \pi/2</math></p>	
21.10	<p><math>\alpha&gt;0</math></p> <p><math>x^2 - y^2 = \alpha^2</math></p> <p><math>I</math></p> <p><math>II</math></p>	<p><math>\alpha&gt;0</math></p> <p><math>x^2 - y^2 = \alpha^2</math></p> <p><math>I</math></p> <p><math>II</math></p>	

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
21.11			
21.12			
21.13			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
21.14	$\alpha > 0$ 		
21.15	$p > \alpha > 0$ 		
21.16	$\alpha > 0$ $\beta > 0$ 		
21.17	$\alpha > 0$ $ z-\sqrt{\alpha}   z+\sqrt{\alpha}  = \alpha$ 		

Номер	Отображающая функция		М. ик
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
21.18	$\alpha > 0$ 	$ w-\alpha =R$ $ w-\alpha =\alpha$ $(\alpha)$ $2/(2\alpha)$	
21.19	$\alpha > 0$ $\beta > 0$ 	$ w-\alpha =\alpha+\beta$ $(\alpha)$ $3/(2\alpha+\beta)$ $1(-\beta)$ $2(-i\sqrt{\beta})$ $1(i\sqrt{\beta})$ $ z-\sqrt{\alpha}  z+\sqrt{\alpha} =\beta$ $ z-\sqrt{\alpha}  z+\sqrt{\alpha} =\alpha$ $(\sqrt{\alpha})$ $3(\sqrt{2\alpha+\beta})$	
21.20	$\alpha > 0$ 	$p=2\alpha^2(1+\cos\theta)$ $2(4\alpha^2)$ $1$ $0$	
22	$w = z^\alpha;$	$z = w^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$	6,28
22.1		$ z =r$ $\arg z = \varphi$ $2(r)$ $\arg w = \alpha\theta$ $ w =r^\alpha$ $2(r^\alpha)$	

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
22.2			
23	$w = \alpha \left( \frac{\bar{z}_1 z}{i\beta - z} \right)^{\frac{\pi}{\Phi}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$		6, 28
23.1 *			
23.2			
23.3			

\* Здесь и далее угол  $\phi$  между кривыми в точке их пересечения определяет угол между касательными к данным кривым в этой точке.

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
23.4			
24	$w = \left[ \frac{\frac{\pi}{\varphi} + r^{\frac{1}{\varphi}}}{\frac{\pi}{\varphi} - r^{\frac{1}{\varphi}}} \right]^2; \quad (r > 0, 0 < \varphi \leq 2\pi)$	$z = r \left( \frac{\sqrt[w]{w} - 1}{\sqrt[w]{w} + 1} \right)^{\frac{\varphi}{\varphi}}$	6, 29
24.1	$\varphi < 2\pi$		
24.2	$\varphi = 2\pi$		
25	$w = \frac{\left( \frac{\bar{z}_1 z}{z - i\alpha} \right)^{\frac{\pi}{\varphi}} + \left( \frac{ z_1 }{1 + \alpha\beta} \right)^{\frac{\pi}{\varphi}}}{\left( \frac{\bar{z}_1 z}{z - i\alpha} \right)^{\frac{\pi}{\varphi}} - \left( \frac{ z_1 }{1 + \alpha\beta} \right)^{\frac{\pi}{\varphi}}}$		6, 29

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
25.1			
25.2			
26	$w^\beta = 1 - z^\alpha \quad (\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq 1, \beta \neq 1)$		6, 28, 29
26.1			
27	$w = -\left(\frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z}\right)^2;$	$z = \frac{2i\sqrt{w}}{w + 1}$	

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
27.1			
28	$w = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}$ ; $z = \frac{w}{\sqrt{1 - w^2}}$		
28.1			
29	$w^2 = \frac{z-1}{z+1}$ ; $z = \frac{1+w^2}{1-w^2}$		
29.1			

Номер	Оговаривающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
29.2			
30	$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right);$	$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$	22, 29
30.1			
30.2			
30.3			
	$\alpha = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}); \quad \beta = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$ ( $\alpha, \beta$ - полуоси эллипса)		
31	$w = e^z \quad (-\pi < \operatorname{Im} z < \pi) \quad z = \ln w$		26, 27

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
31.1			
31.2			
31.3			
31.4			

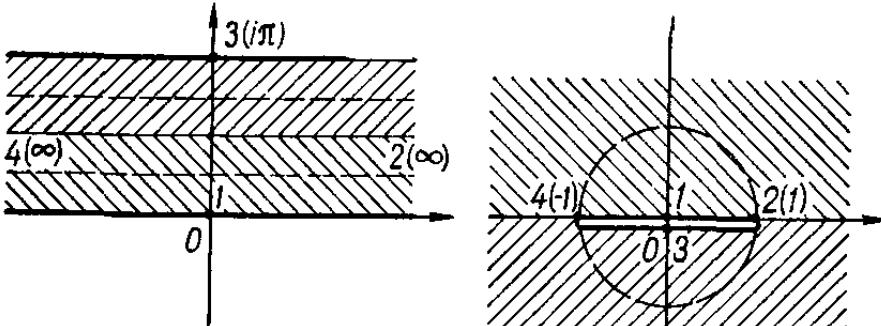
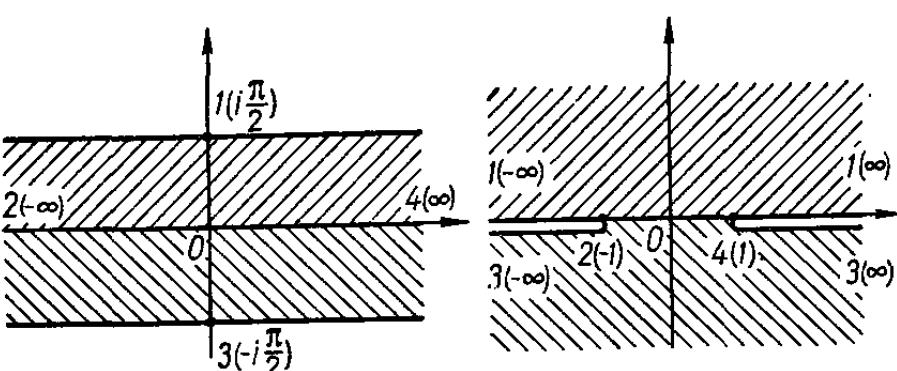
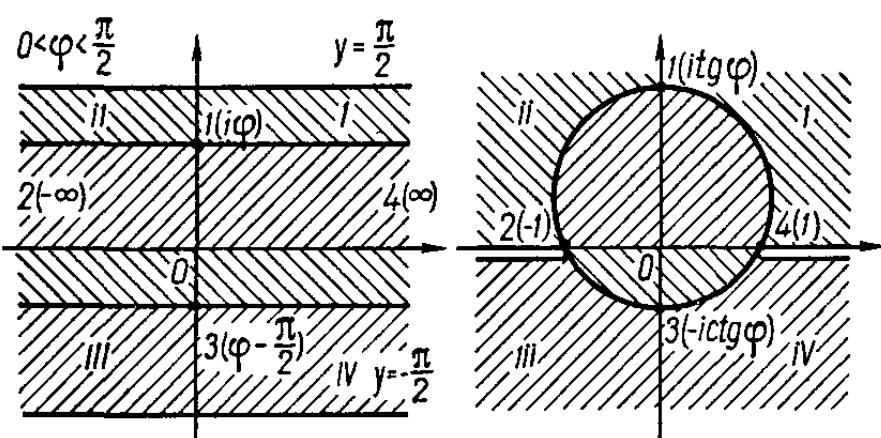
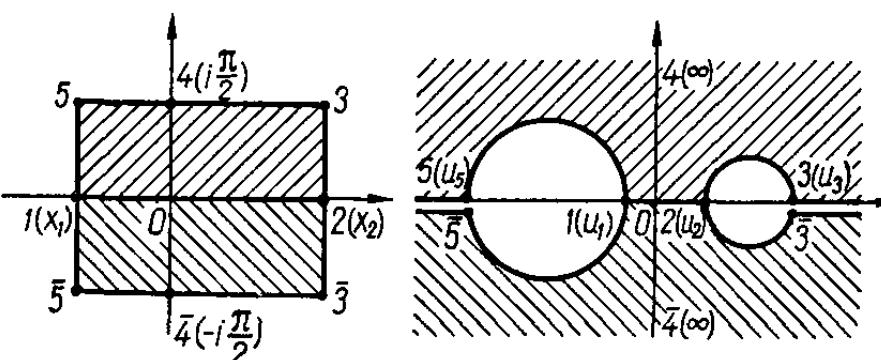
Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
31.5			
31.6			$x_1 = \ln u_1; x_2 = \ln u_2$
31.7			
32	$\omega = \sqrt{1 - e^z};$	$z = \ln(\omega^2 - 1)$	26, 27, 28
32.1			
32.2	$\alpha > 0$ 		

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
32.3	$\alpha > 0$ $\beta > 0$ 		
33	$w = e^{\alpha z} - e^{(\alpha-1)z}$	( $0 < \alpha < 1$ )	26
33.1			
34	$w = z + e^z$		26
34.1			
35	$w = \ln(e^z + \sqrt{e^{2z} - 1})$ ;	$z = \ln \operatorname{ch} w$	26, 27

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
35.1			
36	$w = \ln \frac{z-1}{z+1};$	$z = -\operatorname{cth} \frac{w}{2}$	6
36.1			
36.2			
37	$w = \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}$		29, 31, 32
37.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
38	$w = e^{\alpha z} - \gamma e^{\beta z}$ $(0 < \beta < \alpha, \gamma > 0)$		26
38.1	<p><math>y = \frac{\pi}{\alpha}</math></p> <p><math>y = -\frac{\pi}{\alpha}</math></p> <p><math>\frac{\sin \alpha y}{\sin \beta y} = \gamma e^{(\beta-\alpha)x}</math></p> <p><math>x_1 = \frac{\ln \frac{\beta \gamma}{\alpha}}{\alpha - \beta}; \quad u_1 = -\frac{\alpha - \beta}{\beta} \left( \frac{\beta \gamma}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha - \beta}}</math></p>		
39	$w = \ln(z^\alpha - 1);$	$z = (e^w + 1)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\alpha > 1)$	26, 27
39.1	<p><math>4(e^{2\pi i/\alpha})</math></p> <p><math>\pi/\alpha</math></p> <p><math>\pi/\alpha</math></p> <p><math>1</math></p> <p><math>2(1)</math></p> <p><math>4(\infty)</math></p> <p><math>1(\infty)</math></p> <p><math>3(\infty)</math></p> <p><math>2(\infty)</math></p> <p><math>2\cos v = e^u</math></p>		
40	$w = \ln \frac{z^\alpha + z^{-\alpha}}{2};$	$z = (e^w \pm \sqrt{e^{2w} - 1})^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$	26, 27
40.1	<p><math>4(e^{\frac{3\pi i}{2\alpha}})</math></p> <p><math>3(e^{\frac{\pi i}{\alpha}})</math></p> <p><math>2(e^{\frac{\pi i}{2\alpha}})</math></p> <p><math>1</math></p> <p><math>0</math></p> <p><math>V = -\pi/2</math></p> <p><math>2(\infty)</math></p> <p><math>3(-i\pi)</math></p> <p><math>4(\infty)</math></p> <p><math>1(\infty)</math></p>		
41	$w = \operatorname{cth} \frac{z}{2} = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$		6, 26

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
41.1			
42	$w = k \ln \frac{k}{1-k} + \ln 2 (1-k) + \pi i - k \ln(z-1) - (1-k) \ln(z-1) \quad (k = \frac{1+x_1}{2})$		27
42.1			
43	$w = \ln \sqrt[4]{1-z^4}$		6, 27
44	$w = \operatorname{th} z = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}; \quad z = \operatorname{Arcth} w = \frac{1}{2} \ln \frac{1+w}{1-w}$		6, 26

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
44.1			
44.2			
44.3			
44.4			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
44.5			
45	$w = \ln \coth \frac{z}{2}$	$z = \ln \coth \frac{w}{2}$	6, 27
45.1			
46	$w = \ln \frac{\sinh(z + \alpha)}{\sinh z};$	$z = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{\sinh \frac{w + \alpha}{2}}{\sinh \frac{w - \alpha}{2}} - \alpha \right)$ $(\alpha > 0)$	
46.1			
47	$w = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\gamma}{2} \sqrt{-z} \right);$	$z = \left( \frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{w}}{\gamma} \right)^2 \quad (\gamma > 0)$	

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
47.1	<p><math>y^2 = 4\alpha(\alpha - x)</math></p> <p><math>\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2</math></p>		
48	$w = \operatorname{tg} \frac{\arccos z^2}{4};$	$z = \frac{1' w^4 - 6w^2 + 1}{1 + w^2}$	6, 28
48.1			
49	$w = \operatorname{tg} \frac{\arccos z^{-2}}{4};$	$z = \frac{1}{\sqrt{\cos(4\operatorname{arc} \operatorname{tg} w)}}$	6, 30
49.1			
50	$w = \sin z;$	$z = \operatorname{arc} \sin w$	6, 31

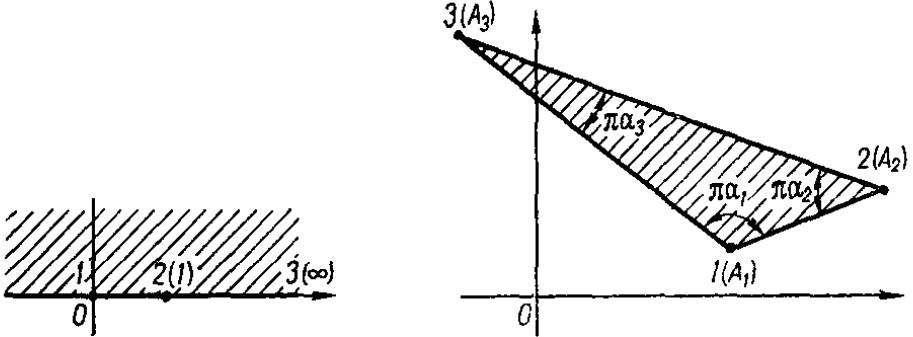
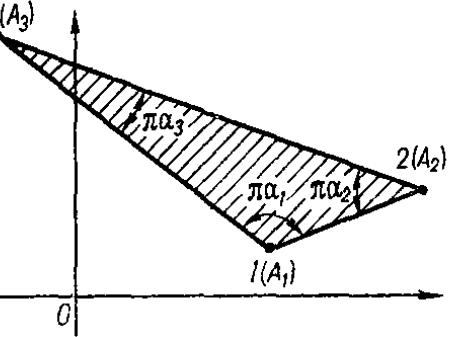
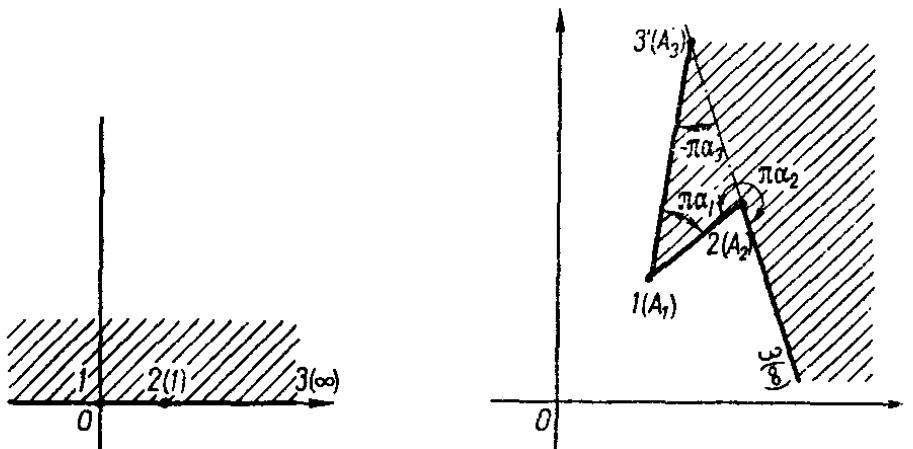
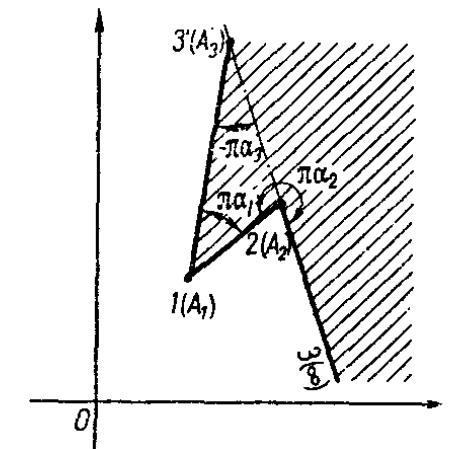
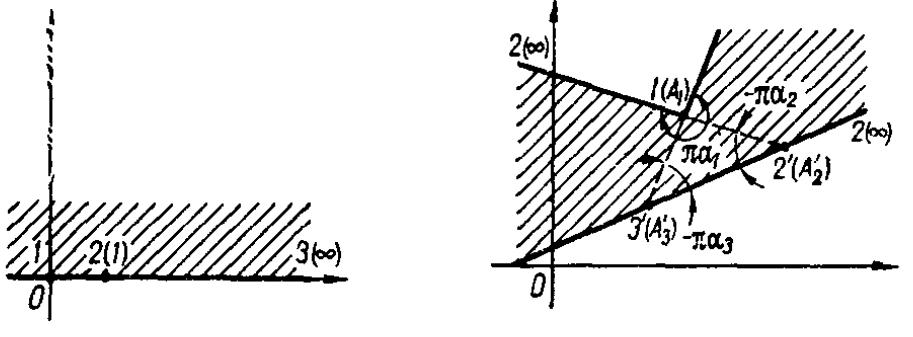
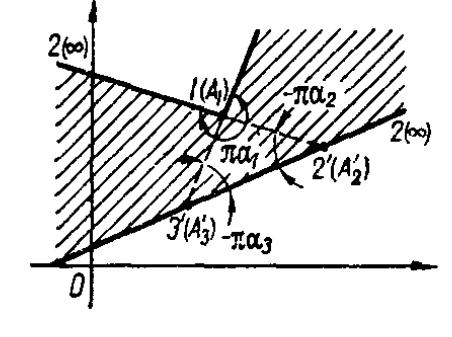
Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
50.1			
50.2	$\alpha > 0$ $\beta > 0$ 		
50.3			
51	$w = \cos(\gamma \sqrt{z});$	$z = \left( \frac{\arccos w}{\gamma} \right)^2 \quad (\gamma > 0)$	6, 31
51.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
52	$w = \sin(\gamma\sqrt{z});$	$z = \left(\frac{\arcsin w}{\gamma}\right)^2 \quad (\gamma > 0)$	6, 31
52.1			
53	$w = z + \gamma \operatorname{cth} z \quad (\gamma > 0)$		6
53.1			
54	$w = \frac{2h}{\pi} \operatorname{Ar th} z;$	$z = \operatorname{th} \frac{\pi}{2h} w$	6, 40
54.1			
55	$w = \operatorname{arc sin} z;$	$z = \sin w$	6, 31
55.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
55.2			
56	$w = \arccos(-z);$	$z = -\cos w$	6, 43
56.1			
57	$w = \cos(\alpha \ln z);$	$z = e^{\arccos \frac{w}{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$	6, 26, 31
57.1			
58	$w = z - \frac{1}{z} + 2γ \ln z \quad (γ > 0)$		6, 27

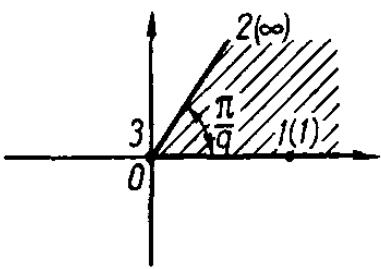
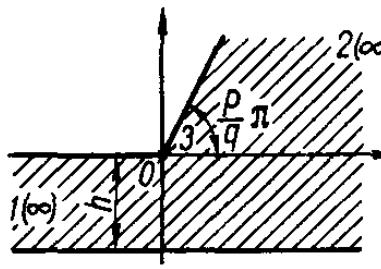
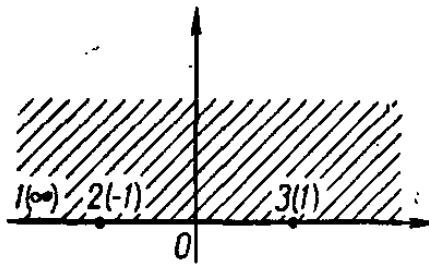
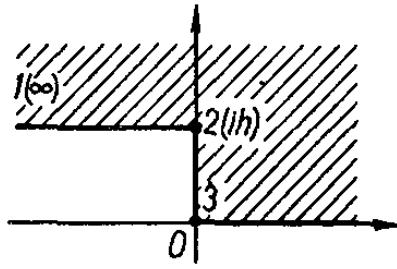
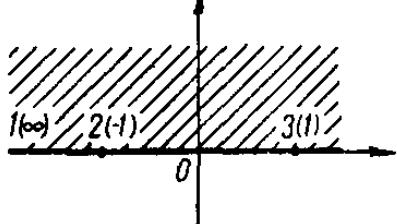
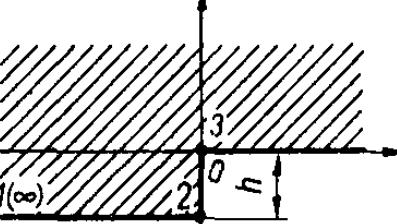
Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
58.1			
59	$w = \operatorname{Ar th} z - \beta \operatorname{Ar th} \frac{z}{\beta}$ ( $\beta > 0$ )		6
59.1			
60	$w = z + \gamma \operatorname{cth} z$ ( $\gamma > 0$ )		6
60.1			

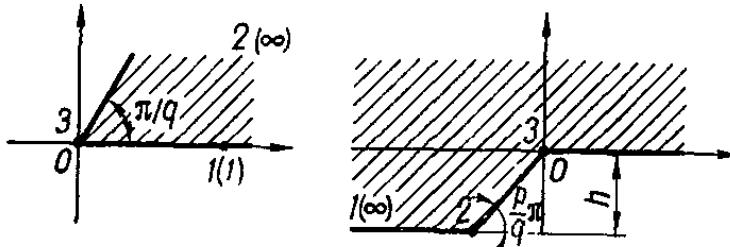
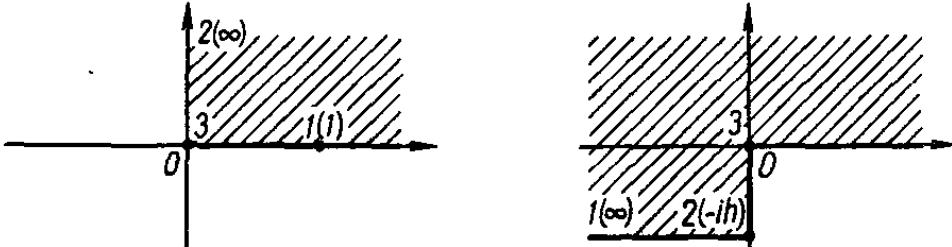
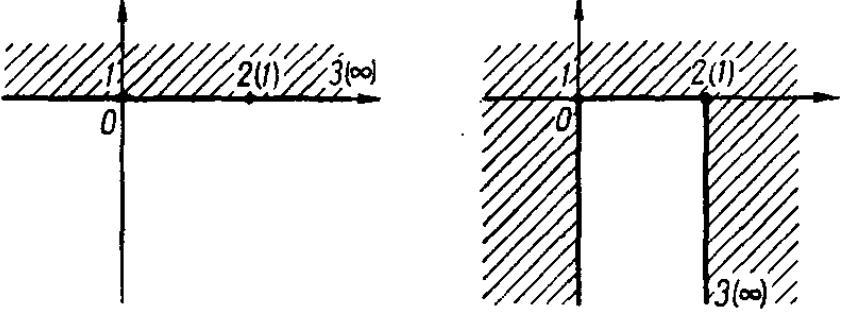
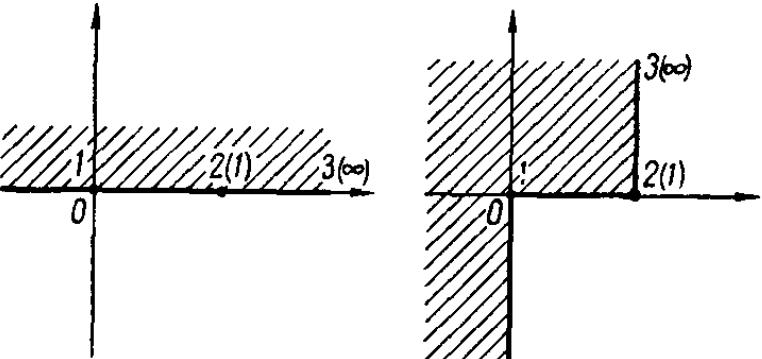
Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
61	$w = \ln \frac{z - \alpha}{z + \alpha} + \ln \frac{\alpha z - 1}{\alpha z + 1}$ ( $0 < \alpha < 1$ )		6, 22
61.1		 $\beta = \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$	
62	$w = i \ln \frac{z - \alpha}{z + \alpha} - i \ln \frac{\alpha z - 1}{\alpha z + 1}$ ( $0 < \alpha < 1$ )		6
62.1	 $\beta = \pi - 4 \operatorname{arctg} \alpha$ $\gamma = \pi + 4 \operatorname{arctg} \alpha$		
63	$w = \begin{cases} (A_2 - A_1) \frac{\Gamma(1 - \alpha_3)}{\Gamma(1 + \alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} z^{\alpha_1} F(1 - \alpha_2, \alpha_1; 1 + \alpha_1; z) + A_1 & \text{при }  z  \leq 1; \\ (-1)^{1 - \alpha_2} (A_2 - A_1) \frac{\Gamma(-\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} z^{-\alpha_3} \times \\ \times F(1 - \alpha_2, \alpha_3; 1 + \alpha_3; \frac{1}{z}) + \\ + (-1)^{\alpha_1} \frac{\sin \pi \alpha_2}{\sin \pi \alpha_3} (A_2 - A_1) + A_1 & \text{при }  z  \geq 1 \end{cases}$		42

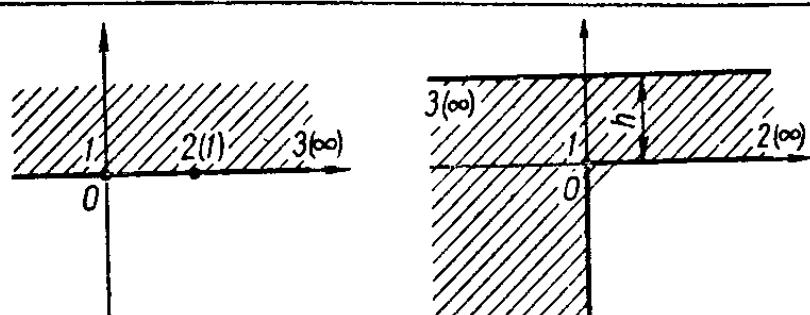
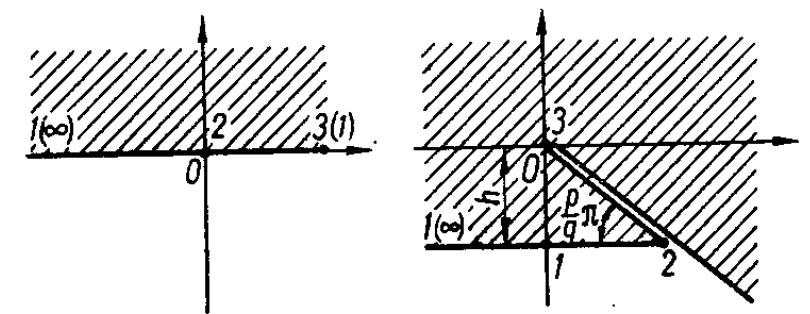
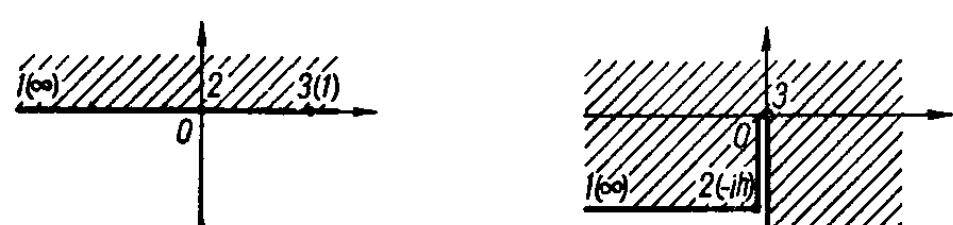
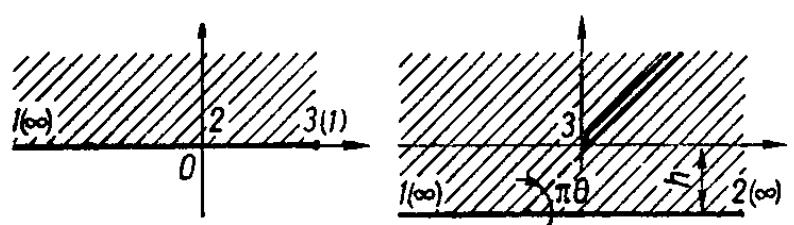
Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
63.1			
63.2			
64	$w = \begin{cases} (A'_2 - A'_1) \frac{\Gamma(1 - \alpha_3)}{\Gamma(1 + \alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} z^{\alpha_1} F(1 - \alpha_2, \alpha_1; 1 + \alpha_1; z) + A'_1 & \text{при }  z  \leq 1, \\ (-1)^{1 - \alpha_2} (A'_2 - A'_1) \frac{\Gamma(-\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} z^{-\alpha_3} F(1 - \alpha_2, \alpha_3; 1 + \alpha_3; \frac{1}{z}) + (-1)^{\alpha_1} \frac{\sin \pi \alpha_2}{\sin \pi \alpha_3} (A'_2 - A'_1) + A'_1 & \text{при }  z  \geq 1 \end{cases}$		42
64.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
65	$w = \begin{cases} \frac{A_1^* - A_1}{2\pi\alpha_1 i} z^{\alpha_1} F(1, \alpha_1; 1 + \alpha_1; z) + A_1 & \text{при }  z  \leq 1; \\ \frac{A_1^* - A_1}{2\pi\alpha_3 i} z^{-\alpha_3} F(1, \alpha_3; 1 + \alpha_3; \frac{1}{z}) + (-1)^{1-\alpha_3} \frac{A_1^* - A_1}{2i \sin \pi \alpha_3} + A_1 & \text{при }  z  \geq 1 \end{cases}$		42
65.1			
66	$w = \frac{2l}{\pi} \arcsin z;$	$z = \sin \frac{\pi w}{2l}$	43
66.1			
67	$w = \frac{h}{\pi} \operatorname{Arch}(2z - 1);$	$z = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi w}{2h}$	43, 25
67.1			
68	$w = \frac{h}{\pi} \ln \frac{1+z}{1-z}$	$z = \frac{e^{\frac{\pi w}{h}} - 1}{e^{\frac{\pi w}{h}} + 1}$	43, 25

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
68.1			
69	$w = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{q-1} \frac{1}{z_n^p} \ln \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right); \quad z_n = e^{\frac{2n\pi i}{q}}$ $(n = 0, 1, 2, \dots, q-1)$		44
69.1			
70	$w = \frac{h}{\pi} [z + \ln(1-z)]$		45
70.1			
71	$w = \frac{h}{\pi} \left( 2z + \ln \frac{1-z}{1+z} \right)$		45
71.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
72	$w = \frac{h}{\pi} \left[ \frac{q}{p} z^p + \sum_{n=0}^{q-1} z_n^p - q \ln \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) \right], \quad z = e^{\frac{2n\pi i}{q}}$ $(n = 0, 1, 2, \dots, q-1)$		45
72.1			
73	$w = \frac{h}{\pi} (\pm \sqrt{z^2 - 1} + \operatorname{Arch} z)$		46
73.1			
74	$w = \frac{h}{\pi} (\sqrt{z^2 - 1} - \operatorname{Arch} z)$		46
74.1			
75	$w = \frac{h}{\pi} \left[ \frac{q}{p} \frac{z^p}{1-z^q} + \sum_{n=0}^{q-1} z_n^p - q \ln \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) \right]; \quad z_n = e^{\frac{2h\pi i}{q}}$		47, 31

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
75.1			
76	$w = \frac{h}{\pi} \left( \frac{2z}{1-z^2} + \ln \frac{1-z}{1+z} \right)$		47
76.1			
77	$w = \frac{2}{\pi} [\arcsin \sqrt{z} - (1-2z) \sqrt{z-z^2}]$		33
77.1			
78	$w = \frac{2}{\pi} (\arcsin \sqrt{z} - \sqrt{z-z^2})$		33
78.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
79	$w = \frac{2h}{\pi} (\operatorname{arctg} \sqrt{z} - \operatorname{arctg} \bar{z})$		33
79.1			
80	$w = \frac{h}{\sin \frac{p}{q}\pi i} e^{-\frac{p}{q}\pi i} \left[ \frac{p}{q} \frac{(z-1)^p - q}{q} + 1 \right]$		33, 48
80.1			
81	$w = -ih \left( \operatorname{arctg} \frac{z-3}{2} + 1 \right)$		33, 48
81.1			
82	$w = \frac{h}{\sin \pi \theta} e^{i\pi \theta} \left[ \frac{(z-1)\theta + 1}{z^q} - 1 \right]$		33, 49
82.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
83	$w = ih \left( \frac{z+1}{2\sqrt{z}} - 1 \right)$		33, 49
83.1			
84	$w = \frac{z^\alpha}{\alpha} - \frac{\lambda z^{\alpha-1}}{1-\alpha}$ ( $0 < \alpha < 1, \lambda > 0$ )		33
84.1			
85	$w = z + \lambda \ln z$ ( $\lambda > 0$ )		33
85.1			
86	$w = -\frac{1}{2-\alpha}(z+1)^{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}(z+1)^{1-\alpha}$ ( $0 < \alpha < 1$ )		33
86.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
87	$w = \frac{l}{k} F(z; m), \quad z = \operatorname{sn}\left(\frac{K}{l} w; m\right),$ $\frac{K'}{K} = \frac{h}{l}$		33, 53
87.1			
88	$w = \frac{l}{E} E(z; m),$ $\frac{h}{l} = \frac{K' - E'}{E}$		33, 51, 52
88.1			
89	$w = \frac{h_1 - h_2}{\lambda\pi} (\sqrt{z^2 - 1} - \lambda \operatorname{Arch} z);$ $\frac{h_2\pi}{h_1 - h_2} = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda} - \arccos \lambda \quad (-1 < \lambda < 1)$		33, 52
89.1			
90	$w = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \sqrt{z^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{z} \right)$		33

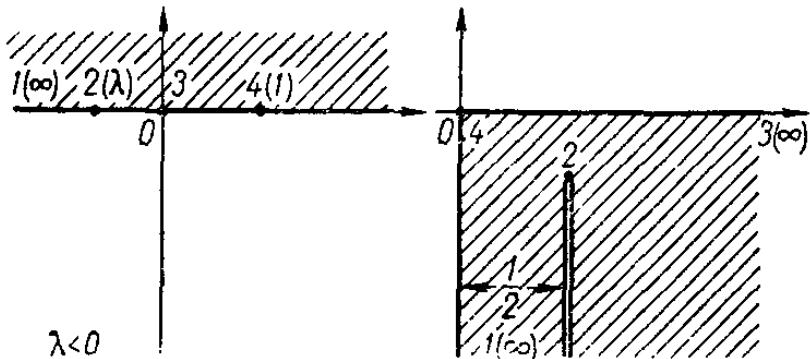
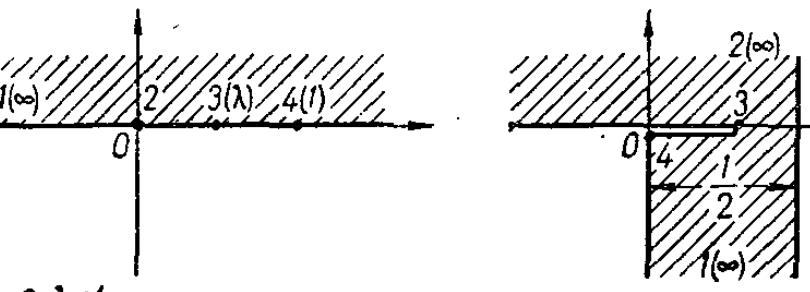
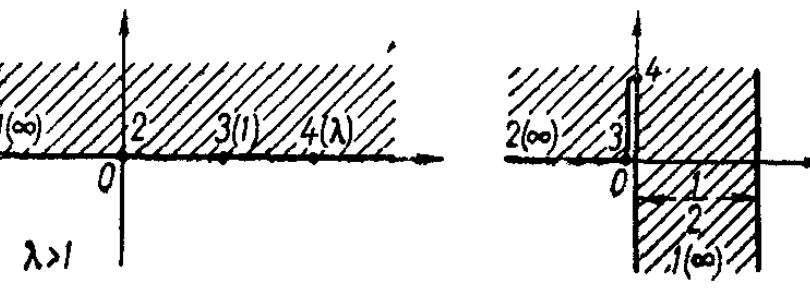
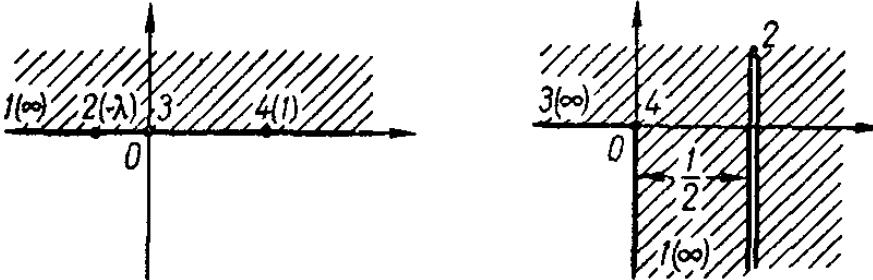
Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
90.1			
91	$w = \frac{2}{\pi} \left( \alpha \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{z}{\lambda - z}} + \beta \operatorname{ar th} \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{z}{\lambda - z}} \right)$ , $\lambda = 1 + \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2$		33
91.1			
92	$w = \gamma (z + 1)^{\alpha_1} (z - 1)^{\alpha_2}; \quad \gamma = r (1 + \lambda)^{-\alpha_1} (1 - \lambda)^{-\alpha_2},$ $\lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$		33
92.1			
93	$w = \frac{l}{\pi i} \left[ \ln \frac{1 + h \sqrt{\frac{z-1}{l^2 + h^2 z^2}}}{1 - h \sqrt{\frac{z-1}{l^2 + h^2 z^2}}} - i \frac{h}{l} \ln \frac{1 - l \sqrt{\frac{1-z}{l^2 + h^2 z^2}}}{1 + l \sqrt{\frac{1-z}{l^2 + h^2 z^2}}} \right]$ $\left( \lambda = \frac{l^2}{h^2} \right)$		33

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
93.1			
94	$w = \frac{1}{\pi i} \left[ l \cdot \ln \frac{1 + L \sqrt{\frac{z-1}{L^2 z - l^2}}}{1 - L \sqrt{\frac{z-1}{L^2 z - l^2}}} - L \cdot \ln \frac{1 + l \sqrt{\frac{z-1}{L^2 z - l^2}}}{1 - l \sqrt{\frac{z-1}{L^2 z - l^2}}} \right]$ $\left( \lambda = \frac{l^2}{L^2} \right)$		33
94.1			
95	$w = \frac{\beta}{\pi} \operatorname{arch} \frac{2z - \lambda - 1}{\lambda - 1} - \frac{\beta}{\pi \sqrt{\lambda}} \operatorname{arch} \frac{(\lambda + 1)z - 2\lambda}{(\lambda - 1)z}$ $\left[ \lambda > 1, \beta > 0, \lambda = \left(\frac{\beta}{h}\right)^2 \right]$		33
95.1			
96	$w = \frac{2}{\pi} \left( \alpha \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} + \beta \operatorname{arth} \frac{\beta}{\alpha} \frac{z}{\sqrt{\lambda^2 - z^2}} \right)$ $\lambda^2 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$		33

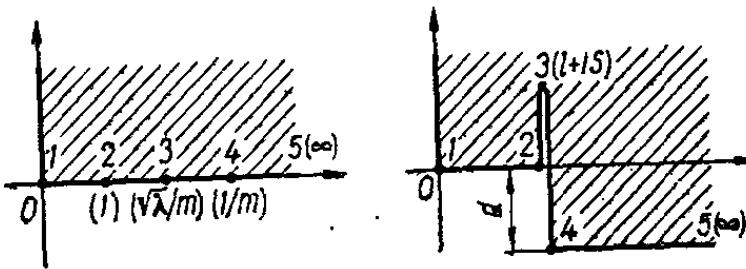
Номер	Отображающая функция		Нули
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
96.1			
97	$w = h \sqrt{z^2 - 1};$	$z = \frac{1}{h} \sqrt{w^2 + h^2}$	33, 52
97.1			
98	$w = \frac{h}{\lambda \pi} (\sqrt{z^2 - 1} - \lambda \operatorname{Arch} z);$ $-\frac{l\pi}{h} = \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}} - \operatorname{Arch} \lambda \quad (\lambda > 1)$		33, 52
98.1			
99	$w = l - \frac{2l}{\pi i} \left[ \operatorname{Arch} \sqrt{z} - \frac{2z - 1 + 4\lambda}{1 + 4\lambda} \sqrt{z(z-1)} \right];$ $\frac{h\pi}{2l} = \frac{1 - 2\lambda}{1 + 4\lambda} \sqrt{\lambda(1 + \lambda)} \quad (\lambda > 0)$		33, 53
99.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
100	$w = l - \frac{2l}{\pi i} \left[ \operatorname{Arch} \sqrt{z} - \frac{2z - 1 - 4\lambda}{1 - 4\lambda} \sqrt{z(z-1)} \right];$ $\frac{h+l}{l} \pi = \frac{(2+4\lambda) \sqrt{\lambda(1-\lambda)}}{1-4\lambda} \quad (0 < \lambda < \frac{1}{4})$		33, 53
100.1			
101	$w = \frac{h_1}{\pi} \ln(1-z) + \frac{h_2}{\pi} \ln(1+\frac{h_1}{h_2}z)$		33, 54
101.1			
102	$w = \frac{l}{\Pi(m; n)} \Pi(z, m, n),$ $H = \frac{m^2}{n+m^2} \frac{\Pi(m'; n')}{\Pi(m, n)}, \quad m' = \sqrt{1-m^2}, \quad n' = -\frac{nm'^2}{n+m^2}$ $\frac{l}{L} = 1 + \frac{K(n) - \Pi(m, n'')}{\Pi(m, n)}, \quad n'' = \frac{m^2}{n}$		33, 55
102.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
103	$w = \frac{l}{\pi i} \left[ -\frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z-1)(z+\lambda)}{z}} + \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{z-1}{z+\lambda}}}{1 - \sqrt{\frac{z-1}{z+\lambda}}} + i \frac{h}{l} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{\lambda(1-z)}{z+\lambda}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda(1-z)}{z+\lambda}}} \right],$ $\lambda = \left( \frac{h}{l} - \sqrt{\frac{h^2}{l^2} + 1} \right)^2$		33
103.1			
104	$w = \frac{l}{\pi i} \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{z-1}{z-\lambda}}}{1 - \sqrt{\frac{z-1}{z-\lambda}}} - \frac{L}{l} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{\lambda(z-1)}{z-\lambda}}}{1 - \sqrt{\frac{\lambda(z-1)}{z-\lambda}}} - \frac{\sqrt{(z-1)(z-\lambda)}}{z} \right],$ $\lambda = \left( \frac{L}{l} - \sqrt{\frac{L^2}{l^2} - 1} \right)^2 < 1$		33
104.1			

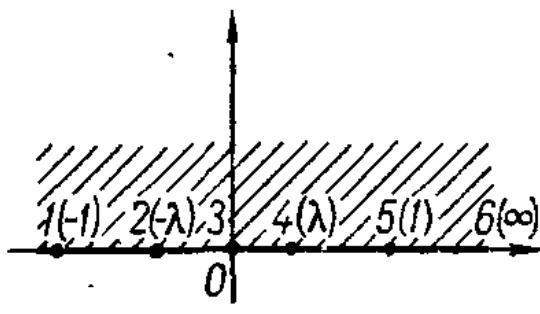
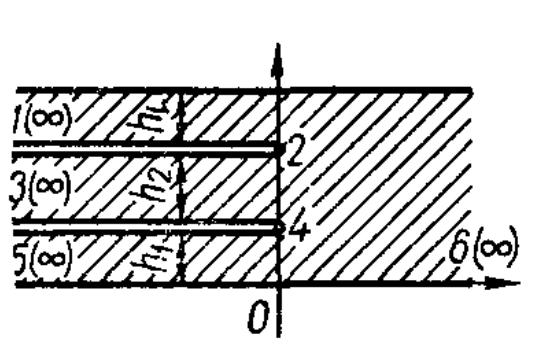
Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
105	$w = \frac{1}{\pi i} \left[ \ln(\sqrt{z} + \sqrt{z-1}) - \lambda \sqrt{\frac{z-1}{z}} \right]$		33
105.1			
105.2			
105.3			
106	$w = \frac{1}{\pi i} \left[ \frac{1}{3} \left( \lambda - 3 - \frac{\lambda}{z} \right) \sqrt{\frac{z-1}{z}} + \ln(\sqrt{z} + \sqrt{z-1}) \right]$		33
106.1			
107	$w = -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{2z-\lambda}{z(2-\lambda)} \sqrt{z-1} - \frac{1}{2i} \ln \frac{1+i\sqrt{z-1}}{1-i\sqrt{z-1}} \right]$		

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
107.1	$-\lambda < -2$		
107.2	$-2 < -\lambda < 0$		
108	$w = \frac{2h}{\pi} \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{z^2 - \sin^2 \frac{\pi s}{2h}}}{\cos \frac{\pi s}{2h}},$ $z = \cos \frac{\pi s}{2h} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi s}{2h} + \operatorname{th}^2 \frac{\pi w}{2h}}$		33, 56
108.1			
109	$w = \frac{2l}{\pi} [K'E(z, m) - (K' - E')F(z, m)],$ $\lambda = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{l}{K'}}$		33, 57
109.1			

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
110	$\omega = l \frac{(1-\lambda) F(z; m) - E(z, m)}{(1-\lambda) K - E};$ $\frac{\pi(S+d)}{l} = \left[ \frac{d}{l} (E - K) - E' \right] F\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{m'^2}}, m'\right) +$ $+ \left( \frac{d}{l} K + K' \right) E\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{m'^2}}, m'\right);$ $\lambda = \frac{\frac{d}{l} (K - E) + E'}{\frac{d}{l} K + K'}$		33, 34, 35, 36
110.1			
111	$\omega = l_1 \frac{F(z, m) - \left(1 + \frac{\lambda n}{m^2}\right) \Pi(z, m, n)}{K - \Pi_0(m; n)};$ $\frac{S}{l} = \frac{\frac{K'}{\Pi(m', n)} \Pi\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{m'^2}}, m'^2, n\right) - F\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{m'^2}}, m'^2\right)}{K - \left(1 + \frac{\lambda n}{m^2}\right) \Pi(m, n)}$ $\frac{l_3}{l_1} = \frac{\frac{\lambda n}{m^2} K - \left(1 + \frac{\lambda n}{m^2}\right) \Pi(m, n'')}{K - \left(1 + \frac{\lambda n}{m^2}\right) \Pi(m, n)}$ $\lambda = \frac{(m^2 + n) K - m^2 \Pi(m', n')}{n \Pi_0(m', n')}$ $n' = -\frac{n m'^2}{m^2 + n}; \quad n'' = \frac{m^2}{n}$	33, 34, 35, 36	

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
111.1			
112	$w = \gamma \sqrt{\frac{z^2 - \lambda^2}{1 - z^2 \lambda^2}}, \quad \gamma = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$		33
112.1			
113	$w = \gamma z^{1-2\alpha} (z^2 - 1)^\alpha, \quad \gamma = r \lambda^{2x-1} (1 - \lambda^2)^{-\alpha}, \quad \lambda = \sqrt{1-2\alpha}$		33
113.1			
114	$w = \sqrt{rR} \left( \frac{z + \lambda_1}{1 + \lambda_1 z} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{z - \lambda_2}{1 - \lambda_2 z} \right)^{\alpha_2};$ $\begin{cases} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} = \sqrt{\frac{r}{R}} \\ \alpha_1 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \lambda_1 \right) = \alpha_2 \left( \frac{1}{\lambda_2} - \lambda_2 \right) \end{cases}$		33
114.1			

*Продолжение*

Номер	Отображающая функция		Пункт
	Плоскость $z$	Плоскость $w$	
115	$w = \frac{h_1}{\pi} \ln(z^2 - 1) + \frac{h_2}{\pi} \ln z \not\rightarrow \gamma,$ $\gamma = -\frac{h_1}{\pi} \ln(1 - \lambda^2) - \frac{h_2}{\pi} \ln \lambda,$ $\lambda = \sqrt{\frac{h_2}{2h_1 + h_2}}$		33
115.1			

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арамонович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. «Наука», М., 1965.
2. Ахieзeр Н. И. Элементы теории эллиптических функций. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
3. Балтага В. К. Комплексные числа. Изд-во Харьковского университета, 1959.
4. Беляков В. М., Кравцова Р. И., Раппорт М. Г. Таблицы эллиптических интегралов, I, П. Изд-во АН СССР, М., 1963.
5. Бериштейн И. Н., Семенидяев К. А. Справочник по математике, М., 1960.
6. Волковысский Л. И., Лунц Г. Л., Арамонович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1960.
7. Голубев В. В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. Физматгиз, М., 1961.
8. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
9. Гончаров В. Л. Теория функций комплексного переменного. Учпедгиз, М., 1955.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
11. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. «Наука», М., 1966.
12. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Физматгиз, М., 1960.
13. Евграфов М. А. Аналитические функции. «Наука», М., 1965.
14. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1941.
15. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.—Л., 1962.
16. Кааратеодори К. Конформное отображение. ОНТИ, М.—Л., 1934.
17. Копиенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. ИЛ, М., 1963.
18. Курант Р. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, М.—Л., 1934.
19. Лаврентьев М. А. Конформные отображения. Гостехиздат, М.—Л., 1946.

20. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. «Наука», М., 1965.
21. Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.
22. Маркушевич А. И. Элементы теории аналитических функций. Учпедгиз, М., 1944.
23. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. «Наука», М., 1966.
24. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, I, II. «Наука», М., 1967—1968.
25. Милн-Томсон Л. Н., Комри Э. Дж. Четырехзначные математические таблицы. Физматгиз, М., 1961.
26. Нельсон, Скорняков Ф. Б. Фильтрация в однородной среде. «Советская наука», М., 1949.
27. Положий Г. И. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Изд-во Киевского университета, 1965.
28. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1960.
29. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
30. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», К., 1968.
31. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного. «Наука», М., 1967.
32. Сегал Б. И., Семендиев К. А. Пятизначные математические таблицы. Физматгиз, М., 1962.
33. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложением к механике. ОНТИ, М.—Л., 1936.
34. Смолянский М. П. Таблицы неопределенных интегралов. «Наука», М., 1967.
35. Соколов Ю. Д. Елементи теорії функцій комплексної змінної. «Радянська школа», К., 1954.
36. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного, I, II. ИЛ, М., 1962.
37. Угодчиков А. Г. Построение конформно отображающих функций при помощи электромоделирования и интерполяционных полиномов Лагранжа. «Наукова думка», К., 1966.
38. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, I, II. Физматгиз, М., 1963.
39. Фильчаков П. Ф. Приближенные методы конформных отображений. «Наукова думка», К., 1964.
40. Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. «Наукова думка», К., 1969.
41. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, II. Физматгиз, М., 1959.
42. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, I, II. «Наука», М., 1968.
43. Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. «Наука», М., 1964.
44. Халилов М. Г. Теория функций комплексного переменного. «Просвещение», М., 1965.
45. Хренов Л. С. Шестизначные таблицы тригонометрических функций. Физматгиз, М., 1960.
46. Штаерман И. Я. Гиперболические функции. ОНТИ, М.—Л., 1935.

47. Я и ч е в с к и й С. А. Функции комплексного переменного.  
ОНТИ, М.—Л., 1937.
48. B e t z A. Konforme Abbildung. Zweite neubearbeitete Auflage.  
Berlin — Cöttingen — Neidelberg, 1964.
49. Experiments in the Computation of Conformal Maps. Ed. by  
I. Todd. National Bureau of Standards Appl. Mat., Ser., 42, 1955.
50. G a i e r D. Konstruktive Methoden der konformen Abbildung  
Springen — Verlag Berlin — Goettingen — Heidelberg, 1964.
51. K o b e r g H. Dictionary of conformal representations. Dover  
Publications. 1952. New York, 1957.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<i>Глава 1. Элементы теории функций комплексного переменного . . . . .</i>	5
§ 1. Комплексные числа . . . . .	5
1. Понятие комплексного числа и его геометрическая интерпретация . . . . .	5
2. Действия над комплексными числами . . . . .	9
§ 2. Функции комплексного переменного . . . . .	19
3. Основные геометрические понятия . . . . .	19
4. Примеры некоторых односвязных областей . . . . .	21
5. Понятие функции и отображения . . . . .	25
6. Основные элементарные функции . . . . .	31
§ 3. Аналитические и гармонические функции . . . . .	36
7. Дифференцируемость и аналитичность . . . . .	36
8. Связь аналитических функций с гармоническими . . . . .	40
§ 4. Интеграл от функции комплексного переменного . . . . .	42
9. Понятие интеграла и его свойства . . . . .	42
10. Теорема Коши . . . . .	45
11. Интегральная формула Коши . . . . .	50
§ 5. Ряды и изолированные особые точки однозначных аналитических функций . . . . .	52
12. Числовые и функциональные ряды . . . . .	52
13. Ряд Тейлора . . . . .	55
14. Ряд Лорана и классификация особых точек. Понятия вычета . . . . .	60
§ 6. Обобщенное понятие аналитической функции . . . . .	66
15. Аналитическое продолжение . . . . .	66
16. Римановы поверхности . . . . .	69
§ 7. Конформное отображение . . . . .	71
17. Геометрический смысл модуля и аргумента производной . . . . .	71
18. Понятие конформного отображения . . . . .	73
19. Основные принципы теории конформных отображений . . . . .	74
<i>Глава 2. Конформные отображения элементарными функциями . . . . .</i>	78
§ 1. Линейная функция . . . . .	78
20. Целая линейная функция . . . . .	78
21. Функция $w = \frac{1}{z}$ . . . . .	80

22. Дробно-линейная функция . . . . .	82
23. Отображение окружности при заданных коэффициентах дробно-линейной функции . . . . .	88
24. Отображение данной окружности на заданную окружность . . . . .	95
25. Отображение двух окружностей на две окружности . . . . .	100
<b>§ 2. Показательная и логарифмическая функции</b> . . . . .	103
26. Функция $w = e^z$ . . . . .	103
27. Функция $z = \ln w$ . . . . .	105
<b>§ 3. Степенная функция</b> . . . . .	107
28. Общие соображения . . . . .	107
29. Функция $w = z^2$ . . . . .	109
30. Функция $w = z^{-2}$ . . . . .	111
<b>§ 4. Тригонометрические и гиперболические функции</b> . . . . .	113
31. Функция $w = \cos z$ . . . . .	113
32. Функция $w = \operatorname{tg} z$ . . . . .	115
 <i>Глава 3. Конформные отображения при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца</i> . . . . .	116
<b>§ 1. Интеграл Кристоффеля — Шварца</b> . . . . .	117
33. Отображение прямолинейного многоугольника. Формула Кристоффеля — Шварца . . . . .	117
34. Некоторые случаи отображения многоугольника . . . . .	121
35. О константах интеграла Кристоффеля — Шварца . . . . .	123
36. Определение констант в случае правильного многоугольника . . . . .	125
37. Определение констант в случае неправильного четырехугольника . . . . .	126
<b>§ 2. Эллиптические интегралы и функции</b> . . . . .	131
38. Эллиптические интегралы . . . . .	131
39. Эллиптические функции Якоби . . . . .	137
<b>§ 3. Отображение двуугольников</b> . . . . .	144
40. Двуугольник $\{0; 0\}$ . . . . .	144
41. Двуугольник $\left\{ \frac{p}{q}; -\frac{p}{q} \right\}$ . . . . .	148
<b>§ 4. Отображение треугольников</b> . . . . .	150
42. Произвольный треугольник . . . . .	150
43. Треугольник $\left\{ 0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$ . . . . .	155
44. Треугольник $\{0; \theta; 1-\theta\}$ . . . . .	157
45. Треугольник $\{0; -0; 1+\theta\}$ . . . . .	160
46. Треугольник $\left\{ -1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\}$ . . . . .	162
47. Треугольник $\{-1; 1-\theta; 1+\theta\}$ . . . . .	165
48. Треугольник $\{-(1-\theta); 0; 2\}$ . . . . .	167
49. Треугольник $\{-1+\theta; -\theta; 2\}$ . . . . .	168

<b>§ 5. Отображение четырехугольников</b>	169
50. Прямоугольник $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$	169
51. Четырехугольник $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$	171
52. Четырехугольники $\left\{-1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right\}$ и $\left\{-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right\}$	172
53. Четырехугольники $\left\{-2; 2; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$ и $\left\{-2; \frac{1}{2}; 2; \frac{3}{2}\right\}$	175
54. Четырехугольник $\{0; 1; 0; 0\}$	177
<b>§ 6. Отображение пятиугольников</b>	180
55. Пятиугольник $\left\{\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$	180
56. Пятиугольник $\left\{0; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}; 0\right\}$	183
57. Пятиугольник $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; \frac{1}{2}\right\}$	185
<b>Каталог конформных отображений</b>	188
<b>Литература</b>	247

ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ ЛАВРИК,  
ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ САВЕНКОВ

**Справочник по конформным отображениям**

Редактор Е. А. Воронько.  
Художественный редактор В. М. Тепляков. Оформление  
художника Г. М. Балюна. Технический редактор М. А. Привыкнина.  
Корректор Е. А. Михалевич.

ВФ 03758. Заказ № 9—772. Изд. № 328. Тираж 6600. Вумага № 2.  
84×108 $\frac{1}{32}$ . Печ. физ. лист. 7,875. Условн. печ. лист. 18,23.  
Уч.-изд. лист. 18,35. Подписано к печати 10.8—1970 г. Цена  
1 руб. 32 коп.

Издательство «Наукова думка». Киев, Репина, 3.

Отпечатано с матриц Киевского полиграфического комбината в Киевской книжной типографии № 5 Комитета по печати при Совете Министров УССР, Киев, Репина 4. Зак. 234.